بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی توسط روش تجزیه آدومین

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا وحیدی

استاد مشاور:

دکتر عقیله حیدری

نگارش:

سمانه دودانگه

اردیبهشت ۸۸

تقدیم به

پدر ومادرم به پاس تمام حمایت‌های دلسوزانه‌شان

تقدیر و تشکر

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا   بر منتهای همت خود کامران شدم

در اینجا لازم می‌دانم مراتب تقدیر و قدردانی خود را از کسانی که در مراحل تدوین پایان‌نامه مرا مورد لطف وعنایت خود قرار دادند، اعلام دارم.

از استاد راهنمای ارجمندم آقای دکتر علیرضا وحیدی که با راهنماییهای مفید و سودمندشان در امر تحقیق مرا یاری کردند و تجربیات خود را صادقانه در اختیارم نهادند، کمال تشکر و امتنان را دارم.

از سرکار خانم دکتر عقیله حیدری و دکتر محمد حسن بیژن‌زاده به خاطر حضور در جلسه دفاعیه و راهنمابیهای ارزنده‌شان تشکر می‌نمایم.

همچنین از خانواده عزیزم که در تمام مراحل تحصیلی همواره حامی من بودند و خاله عزیزم وخانواده محترمشان که هر یک به نحوی اینجانب را مورد لطف قرار دادند، سپاسگزارم.

چکیده

روش تجزیه آدومین در اوایل دهه‌ی ۱۹۸۰ توسط جورج آدومین (۱۹۹۶–۱۹۲۰) برای حل معادلات تابعی پیشنهاد شده است. این روش خیلی زود در جامعه‌ی ریاضی مورد توجه قرار گرفت و عده‌ای از پژوهشگران به تحقیق در این روش پرداختند. تجزیه و تحلیل این روش از نقطه‌نظر تئوریک، جستجو برای پیدا کردن کاربردهای بیشتر برای این روش و مقایسه این روش با روش‌های کلاسیک و شناخته شده‌ای که برای بعضی از معادلات تابعی وجود دارد، میدان پژوهشی وسیعی را برای پژوهشگران فراهم کرده است.

به دلیل محدودیت‌های روش‌های تحلیلی، حل عددی مسائل ریاضی از دیرباز مورد توجه بوده و برحسب ضرورت و نیاز روش‌هایی نیز ارائه شده است. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل اشاره کرد. این پایان‌نامه به حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط اولیه ومرزی مختلف با روش تجزیه آدومین پرداخته و شامل سه فصل به‌صورت زیر است.

در فصل اول مفاهیم وتعاریف اولیه در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را بیان و در ادامه سه روش مهم شامل روش مشخصه‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول با شرط اولیه خاص، روش جداسازی متغیرها و روش تبدیلات انتگرال را برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم را ارائه کرده‌ایم.

در فصل دوم روش تجزیه آدومین را معرفی و با ساختار کلی آن آشنا می‌شویم. همچنین در این فصل سه روش برای محاسبه‌ی چندجمله‌ای‌های آدومین ارائه شده است.

در فصل سوم روش تجزیه آدومین برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و دوم با شرایط اولیه و مرزی مختلف به کار رفته و با ارائه‌ی مثال‌هایی کارایی روش نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: روش تجزیه آدومین، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

فهرست مطالب

پیش گفتار

به طور معمول برای محاسبه جواب‌های واقعی وعینی مسائل مختلط فیزیکی با دستگاه‌هـای دینـامیکی کـه توسـط معادلات دیفرانسیل معمولی، جزئی، تصادفی و یا معادلات انتگرال و انتگرو دیفرانسیل مدل سازی می‌شوند، سروکار داریم. بدیهی است که در حالت کلی ممکن است این دستگاه‌ها شامل جملات غیرخطی پیچیده، پارامترهای تصادفی، داده‌ها ویا شرایط مرزی خاصی باشند که حل مسئله را در حالت کلی با مشکل مواجه می‌کند. لذا یک نکته مهـم واساسی در علوم ریاضی عبارت است از اصلاح فیزیکـی جـوابی از ایـن دسـتگاههای دینـامیکی کـه توسـط چنـین معادلاتی مدل سازی شده‌اند، به صورتی که این جواب، تقریبی خوب از جواب واقعی مساله باشد.

حل مسائل غیرخطی در معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی و همچنین پاره‌ای از مسائل کاربردی در ریاضی فیزیک از دیرباز مورد توجه ریاضیدانان بوده است. اکثر روشهایی که در دو دهه‌ی گذشته برای حل مسائل غیرخطـی مـورد استفاده قرار گرفته‌اند، بر مبنای اصول خطی‌سازی، اختلالات جزئی، گسسته‌سازی و یا محدودیت‌هـای اضـافه روی مسئله اولیه استوارند. تکنیک‌های خطی‌سازی و اختلالات جزئی روشهای معقولی هستند، اما اسـتفاده مـدوام از آنهـا برای حل مسائل غیرخطی ممکن است در تعداد مراحل کم، نمایش درستی از جواب واقعی مسئله فیزیکی را بدسـت ندهند و به عبارتی دیگر ممکن است جوابی متفاوت با رفتار فیزیکی واقعی مسئله داشته باشیم.

به طور کلی روش‌هایی که برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی وجود دارند، به دو دسته روش‌هـای عـددی و روش های تحلیلی تقسیم می‌شوند. روش‌های تحلیلی به حل معادلات متعارف با دامنه‌های ساده محدود شده‌انـد و در حالت‌های خاص مورد استفاده قرار می‌گیرند ودر بیشتر مواقع نمی‌توانند به منظور حل مسـائل متعـدّد واقعـی مـورد استفاده قرار گیرند. در جواب‌های بدست آمده از روش‌هـای تحلیلـی، متغیـر مجهـول بـه صـورت عبـارتی ریاضـی برحسب متغیرهای مستقل و پارامترهای معادلات، که معمولاً سری نامتناهی یا انتگرال‌اند، داده می‌شـوند. روش جداسازی متغیرها و روش تبدیلات انتگرال از مهم‌ترین روش‌های تحلیلی‌انـد. عمومـاً معـادلات بـا ضـرایب متغیـر، معادلات با دامنه‌های پیچیده و معادلات غیرخطی به صورت تحلیلی قابل حل نمی‌باشند. حتی هنگـامی کـه مـا یـک جواب دقیق بدست می‌آوریم اغلب به صورت سری نامتناهی می‌باشد. بدتر اینکه، اگرچه محاسبه‌ی هـر جملـه از سری عملی می‌باشد اما اصولاً این کاری کسل‌کننده است وعلاوه براین ممکن است همگرایی سری بسیار کند باشد.

روش‌های عددی بر این اساس هستند که متغیرهای پیوسته با متغیرهای گسسته جایگزین می‌شوند. این روش‌هـــــا (مانند روش تفاضل متناهی صریح، روش تفاضل متناهی ضمنی،...)یک معادله دیفرانسیل جزئـی را بـه یـک دسـتگاه معادلات تفاضلی که بتوان آن را با تکنیک‌های مکرّر در کامپیوتر حل کرد، تغییر می‌دهنـد. در بسـیار از حـالات، ایـن تنها تکنیکی است که کار می‌کند. جوابهایی که از این روش‌ها بدست می‌آیند، درواقع جواب معادلهٔدیفرانسیل جزئـی را تقریب می‌زند و نتیجه معمولاً، جدولی از اعداد است که جواب را به ازای مقـادیر مختلفـی از متغیرهـای مسـتقل تعیین می‌کند. هر چند بسیاری از مسائلی که دارای جواب تحلیلی معین نمی‌باشند را می‌توان با روش‌های عددی حل کرد، اما روش‌های عددی مورد استفاده نیز ما را با مشکلاتی مانند میزان محاسبات مورد نیاز مواجه می‌کند و معمـولاً خطای گرد کردن باعث از دست دادن دقت می‌شود.

جورج آدومین[۱] (۱۹۹۶–۱۹۲۰) در سال ۱۹۸۱، روش تجزیه‌ای – که به نام خودش منسـوب اسـت– را بـرای حـل معادلات عملگری خطی تصادفی ارائه نمود. این روش بین سال‌هـای ۱۹۹۲– ۱۹۸۱ بـه سـرعت بـرای حـل پـاره‌ای ازمسائل غیرخطی فراگیر شد. روند تاریخی روش ومفاهیم کلی آن در فصل دوم ذکـر گردیـده اسـت. روش تجزیـه آدومین یک روش عددی و یک ابزار قدرتمند برای حل معادلات تابعی است. این روش جواب را به صـورت یـک سری با نرخ همگرایی نسبتاً بالایی بیان می‌کند و می‌توان آن را تعمیم‌یافته سری تیلور دانست، با این تفاوت که سری تیلور حول نقطه‌ی $x = 0$ بوده اما جملات سری مذکور حول تابعی مانند u_0 می‌باشد[۱۸].

از آنجا که این روش جواب را به صورت جملات یک سری بیان می‌شود، باید همگرایی سری به اثبـات برسـد. لـذا کارهایی حول این موضوع صورت گرفته است که از آن میان می‌توان قضایای اثبـات شـده توسـط پرفسـور شـقو[۲] و همکاران را نام برد [۱۷–۱۶]. این روش یک طرح مستقیم برای حل مسائل ، بدون نیاز به خطی‌ســـازی، گسســـته سازی، اختلالات جزئی ویا فرض‌های محدود کننده است. درباره‌ی مزایای اصلی این روش می‌توان گفـت کـه ایـن روش به طور مستقیم برای همه نوع از معادلات دیفرانسیل یـا معـادلات انتگـرال ، خطـی یـا غیرخطـی، همگـن یـا غیرهمگن، با ضرایب ثابت یا ضرایب متغیر به کار برده می‌شود. مزیت مهم دیگـر ایـن اسـت کـه ایـن روش میـزان محاسبات را به گونه‌ای که هنوز دقت جواب عددی حفظ شود، به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهـد. آنچـه در

[۱] George Adomian
[۲] Yves Cheruault

این پایان‌نامه به آن می‌پردازیم استفاده از این روش برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی و مقایسه نتـایج عـددی ایـن روش با جواب دقیق است. تمام محاسبات این پایان‌نامه یا برنامه‌های نوشته شده با نرم‌افزار متمتیکا[3] اجرا شده‌اند کـه این برنامه‌ها در ضمیمه‌ی پایان‌نامه آمده‌اند. مشخصات کامپیوتری که برنامه‌ها در آن اجرا شده‌اند به شرح زیر است

Ram : ۱ Gi bi

Cpu : 2160 دو هسته‌ای

h.d.d 8. sata

VGA 7300 PCI

[3] mathematica

فهرست جدول‌ها

فصل اول

۱-۲ تعاریف‌ومفاهیم اولیه

۱-۲-۱ تعریف. یک معادله متشکل از دو یا چند متغیر مستقل همراه با مشتقات جزئی یک یا چند متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل، یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی نامیده می‌شود.

صورت کلی معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی به صورت زیر است

$$F(x_1,...,x_n,u,u_{x_1},...,u_{x_n},u_{x_1x_2},...,u_{x_ix_j},....)=0 \qquad (۱-۱)$$

به طوری که F یک تابع معین و $i,j=1,...,n$, $u_{x_j}=\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $u_{x_ix_j}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, ..., مشتقات جزئی از u می باشند.

۱-۲-۲ تعریف. مرتبه‌ی یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی برابر است با بالاترین مرتبه‌ی مشتق که در معادله ظاهر می‌شود.

فرض کنید Ω یک مجموعه‌ی باز وهمبند در فضای اقلیدسی n بعدی R^n باشد و $C^k(\Omega)$ فضای توابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر حداکثر تا مرتبه‌ی k باشد. فرض کنید که معادله‌ی(۱-۱) از مرتبه‌ی m است، در این صورت تعاریف زیر را داریم.

۱-۲-۳ تعریف. منظور از یک جواب برای معادله‌ی (۱-۱) تابعی مانند $u\in C^m(\Omega)$ است، به طوری که اگر u و مشتقاتش تا حداکثر مرتبه‌ی m را در معادله‌ی (۱-۱) جای‌گذاری کنیم، یک اتحاد در $(x_1,..,x_n)\in\Omega$ بدست آوریم.

۱-۲-٤ تعریف. فرض کنید

$$u(x_1,...,x_n)\mapsto Lu:=F(x_1,...,x_n,u,u_{x_1},...,u_{x_ix_j},...) \qquad (۲-۱)$$

عملگر L را خطی گوییم اگر وتنها اگر به ازای هر تابع u_1 و u_2 وهر ثابت c_1 و c_2 داشته باشیم

$$L(c_1u_1+c_2u_2)=c_1L(u_1)+c_2L(u_2) \qquad (۳-۱)$$

۱-۲-۵ تعریف. یک معادله را تقریباً خطی گوییم، هرگاه به صورت $Lu+f(x,u)=0$ باشد، که در آن $f(x,u)$ یک تابع غیرخطی نسبت به u می‌باشد.

معادله‌ی موج به صورت $u_{tt}-u_{xx}+u^3=0$ یک معادله‌ی دیفرانسیل تقریباً خطی است.

۱-۲-٦ تعریف. یک معادله را شبه‌خطی گوییم اگر نسبت به بالاترین مرتبه‌ی مشتق، خطی باشد.

۱–۲–۷ مثال. معادلات زیر همگی شبه‌خطی می‌باشند

$u_x + uu_y = 0$ (معادله‌ی موج‌های ضربه‌ای؛ مرتبه: ۱)

$u_t + cuu_x = 4u_{xx}$ (معادله‌ی برگر؛ مرتبه: ۲)

$u_t + cuu_x + u_{xxx} = 0$ (معادله‌ی kdv [۴]؛ مرتبه:۳)

۱–۲–۸ تعریف. یک معادله را کاملاً غیرخطی گوییم اگر نسبت به بالاترین مرتبه‌ی مشتق غیرخطی باشد.

۱–۲–۹ مثال. معادلات زیر غیرخطی می‌باشند

$u_x^2 + u_y^2 = f^2(x,y)$ مرتبه: ۱

$u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} = f(x,y)$ مرتبه: ۲

۱–۲–۱۰ تعریف. اگر L عملگر تعریف شده در (۱–۲) باشد، آنگاه معادله‌ی $Lu = 0$ را معادله‌ی همگـــــــــن و اگر $Lu = f$ و $f \neq 0$ آنگاه معادله را ناهمگن می‌نامند.

برای اینکه یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی جواب یکتا داشته باشد باید شرایطی را که معمولاً شرایط جنبی نامیده می‌شود را بر جواب تحمیل کنیم. این شرایط معمولاً به صورت شرایط اولیه یا شرایط مرزی ویا ترکیبی از این دو هستند. منظور از شرایط اولیه، مقدارهایی از تابع مجهول u و تعداد مناسبی از مشـتقاتش در زمـان اولیـه اسـت و منظور از شرایط مرزی مقدارهایی از تابع مجهول u روی مرز از دامنه‌ی D می‌باشد. سه نوع مهم از شـرایط مـرزی عبارت هستند از

شرایط دیریکله یا شرایط مرزی نوع اول مقدارهایی از u را در هر نقطه از مرز از دامنه‌ی D را مشـخص مـی کنند.

شرایط نیومن یا شرایط مرزی نوع دوم مقدارهایی از مشتق نرمال u، $(\frac{\partial u}{\partial n})$ را در هر نقطه از مرز از دامنه‌ی D را مشخص می‌کنند.

[۴] Kortewege de vries

شرایط ترکیبی یا شرایط مرزی نوع سوم مقدارهایی از یک ترکیب خطی u و مشتق نرمالش $(\frac{\partial u}{\partial n}+\lambda u)$ را در هر نقطه از مرز از دامنه‌ی D را مشخص می‌کنند.

۱-۲-۱۱ تعریف. یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی همراه با شرایط اولیه، مسئله‌ی مقدار اولیه نامیده می‌شود.

۱-۲-۱۲ تعریف. یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی همراه با شرایط مرزی، مسئله‌ی مقدار مرزی نامیده می‌شود.

۱-۲-۱۳ تعریف. یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی همراه با شرایط اولیه و شرایط مرزی، مسئله مقدار اولیه و مرزی نامیده می‌شود.

اصل انطباق. اگر L یک عملگر خطی باشد و روابط زیر به ازای $i=1,2,...,n$ برقرار باشد

$$L[w_i]=0 \qquad , \qquad L[u_i]=G_i$$

آنگاه خواهیم داشت

$$L[\sum_{i=1}^{n}(u_i+w_i)]=\sum_{i=1}^{n}G_i$$

شکل عمومی برخی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم مشهور که در فصل سوم بیشتر آنها را به کار خواهیم برد، به صورت زیر می‌باشند

معادله‌ی خطی موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=A(x,y,z,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y,z,t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C(x,y,z,t)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+D(x,y,z,t)$$

معادله‌ی خطی گرما

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t}=A(x,y,z,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y,z,t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C(x,y,z,t)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+D(x,y,z,t)$$

معادله‌ی خطی کلین- گوردن[5]

$$\frac{\partial u}{\partial t^2}=\frac{1}{c^2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})+g(x,y,z,t) \qquad (c \text{ مقداری ثابت})$$

معادله‌ی برگرز[6]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (v \text{ مقداری ثابت})$$

---

[5] Klein- Gordon
[6] Burgers

معادله‌ی لاپلاس
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

معادله‌ی پواسن
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x)$$

۱-۳ جواب‌عمومی معادلات‌دیفرانسیل‌جزئی خطی‌مرتبه‌ی‌اول

معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول برحسب دو متغیر مستقل x,y و متغیر وابسته‌ی u به صورت

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=d(x,y) \tag{۱-٤}$$

در نظر بگیرید به طوری که ضرایب $a,b,c,d\in C^1(\Omega)$ و $\Omega\subset R^2$ و $(a,b)\neq(0,0)$.

اگر عملگر Lرا به صورت $L:=a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c$ در نظر بگیریم معادله‌ی (۱-٤) را می‌توان به صورت خلاصه

به فرم $Lu=d$ نوشت که معادله‌ی همگن متناظر با آن عبارت است از

$$Lu=0 \tag{۱-٥}$$

۱-۳-۱ تعریف. منظور از جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل همگن (۱-٥)، رابطه‌ای است که شامل یک تابع دلخواه بوده و برای هر انتخاب تابع دلخواه جوابی از معادله‌ی (۱-٥) بدست آید. اگر u_h جواب عمومی معادله‌ی همگن و u_p یک جواب خصوصی معادله‌ی ناهمگن(۱-٤) باشد، آنگاه جواب عمومی معادله‌ی (۱-٤) به صورت u_h+u_p خواهد بود.

برای بدست آوردن جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول(۱-٤)، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم که $a(x,y)\neq 0$. معادله‌ی دیفرانسیل معمولی زیر را تشکیل   می دهیم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)} \tag{۱-٦}$$

جواب عمومی که از معادله‌ی(۱-٦) بدست می‌آید را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\eta(x,y)=k \tag{۱-٧}$$

که در آن k یک ثابت انتگرالگیری است. در [۳۲] ثابت شده است که اگر تبدیل مختصات

$$\begin{cases}\xi = x \\ \eta = \eta(x, y)\end{cases} \tag{۸-۱}$$

را با شرط $J = \dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix} = \eta_y \neq 0$ در نظر بگیریم، معادله‌ی (۱-٤) به فرم زیر تحویل می‌یابد

$$a(\xi,\eta)u_\xi + c(\xi,\eta)u = d(\xi,\eta) \tag{۹-۱}$$

که فرم کانونی معادله‌ی (۱-٤) نامیده می‌شود و به صورت معادله‌ی دیفرانسیل معمولی حل می‌گردد.

۱-۳-۲ مثال. جواب عمومی معادله‌ی زیر را بدست آورید

$$xu_x - yu_y + y^2u = y^2 \tag{۱۰-۱}$$

با توجه به معادله (۱-٤) داریم

$$a(x,y) = x \;،\qquad b(x,y) = -y \;،\qquad c(x,y) = y^2 \;،\qquad d(x,y) = y^2$$

ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل معمولی $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ را حل می‌کنیم که جواب عمومی آن به صورت $xy = k$ می‌باشد

بنابراین یک تبدیل مناسب به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{cases}\xi = x \\ \eta = xy\end{cases} \tag{۱۱-۱}$$

چون $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix}1 & 0 \\ y & x\end{vmatrix} = x \neq 0$، بنابراین x, y برحسب η, ξ به صورت زیر تعیین می‌شوند

$$x = \xi \qquad \text{و} \qquad y = \frac{\eta}{\xi}$$

لذا ضرایب a, c, d برحسب ξ, η به صورت زیر به دست می‌آیند

$$a(\xi,\eta) = \xi \qquad , \qquad c(\xi,\eta) = \frac{\eta^2}{\xi^2} \qquad , \qquad d(\xi,\eta) = \frac{\eta^2}{\xi^2} \tag{۱۲-۱}$$

با جایگذاری روابط (۱-۱۲) درفرمول (۱-۹) خواهیم داشت

$$\xi u_\xi + \frac{\eta^2}{\xi^2}u = \frac{\eta^2}{\xi^2} \qquad \Rightarrow \qquad u_\xi + \frac{\eta^2}{\xi^3}u = \frac{\eta^2}{\xi^3}$$

که یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی (خطی مرتبه اول) می‌باشد وجواب آن از دستور زیر بدست می‌آید

$$u = e^{-\int \frac{\eta^2}{\xi^3}d\xi}\left[f(\eta) + \int \frac{\eta^2}{\xi^3} e^{\int \frac{\eta^2}{\xi^3}d\xi} d\xi\right]$$

$$= e^{\frac{\eta^2}{2\xi^2}}[f(\eta)+\int \frac{\eta^2}{\xi^3}e^{-\frac{\eta^2}{2\xi^2}}d\xi]$$

$$= e^{\frac{\eta^2}{2\xi^2}}[f(\eta)+e^{-\frac{\eta^2}{2\xi^2}}]$$

$$= f(\eta)e^{\frac{\eta^2}{2\xi^2}}+1$$

با جایگذاری روابط (۱-۱۱) در معادله‌ی بدست آمده جواب عمومی معادله‌ی (۱-۱۰) به صورت زیر خواهد بود

$$u(x,y) = f(xy)e^{\frac{y^2}{2}}+1$$

اکنون یک روش تحلیلی در حل معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی اول با شرط اولیه خاص را بیان می‌کنیم.

۱-٤ روش مشخصه‌سازی

فرم کلی معادلات شبه‌خطی مرتبه‌ی اول به صورت زیر است

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \qquad (۱-۱۳)$$

منظور از شبه‌خطی بودن عملگری است به صورت

$$u(x,y) \to Lu := a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y - c(x,y,u)$$

که عملگر غیرخطی است اما نسبت به مشتقات u_x, u_y خطی می‌باشد. یک جواب از معادله‌ی (۱-۱۳) به صورت یک رویه‌ی انتگرال $u = u(x,y)$ است که در فضای اقلیدسی (x,y,u) تعریف می‌شود.

فرض کنید شرط اولیه برای مسئله (۱-۱۳) منحنی Γ، به صورت زیر پارامتری شده باشد

$$\Gamma = \Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s)) \qquad s \in I = (\alpha,\beta)$$

منحنی Γ منحنی اولیه نامیده می‌شود. مسئله، یافتن جواب معادله‌ی (۱-۱۳) به صورت $u(x,y)$ است که از منحنی داده شده‌ی Γ بگذرد. چنین مسئله‌ای را مسئله‌ی کشی برای معادلات شبه‌خطی مرتبه‌ی اول می‌نامیم. برای یافتن جواب از روش مشخصه‌سازی استفاده می‌کنیم. در این روش ابتدا دستگاه

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x,y,u) \\ \dfrac{dy}{dt} = b(x,y,u) \\ \dfrac{du}{dt} = c(x,y,u) \end{cases} \qquad (۱-۱٤)$$

را تشکیل می‌دهیم که دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول می‌باشند. چنین دستگاهی را دستگاه معادلات مشخصه می‌نامیم و جواب این دستگاه را منحنی مشخصه می‌نامیم. به منظور تعیین یک منحنی مشخصه یک شرط اولیه نیاز داریم. چون هر منحنی $(x(t),y(t),z(t))$ از یک نقطه‌ی متفاوت $\Gamma(s)$ بدست می‌آید، می‌توانیم به صراحت منحنی را در فرم $(x(t,s),y(t,s),u(s,t))$ بنویسیم در نتیجه شرط اولیه به صورت زیر پارامتری می‌شود

$$\Gamma: \quad x(0,s)=x_0(s) \quad , \quad y(0,s)=y_0(s) \quad , \quad u(0,s)=u_0(s) \qquad (۱۵-۱)$$

توجه کنید که پارامتر t را طوری انتخاب کردیم که منحنی مشخصه روی Γ در $t=0$ تعیین‌گردد.

به طور تحلیلی به منظور بدست آوردن رویه‌ی انتگرال S (جواب مسئله) که شامل منحنی Γ باشد، چنین عمل می کنیم. ابتدا Γ را به صورت $(x_0(s),y_0(s),u_0(s))$ پارامتری می‌کنیم، سپس دستگاه (۱-۱٤) را با استفاده از شرایط (۱-۱۵) حل می‌کنیم. توجه داشته باشید که دستگاه (۱-۱٤) یک دستگاه خودمختار از معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد یعنی وابستگی صریحی نسبت به پارامتر t وجود ندارد. بدین ترتیب رویه‌ی انتگرال S، که با پارامترهای t و s پارامتری شده، را بدست می‌آوریم. تنها کاری که برای یافتن $u(x,y)$ باقی مانده این است که متغیرهای s و t را با عبارتی برحسب x و y جایگزین کنیم این کار را می‌توان با استفاده از قضیه‌ی تابع معکوس انجام داد. با توجه به قضیه‌ی تابع معکوس وقتی این کار قابل انجام است که ماتریس ژاکوبی نامنفرد باشد یعنی

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{vmatrix}=x_s y_t - y_s x_t \neq 0 .$$

در حالت کلی جواب مساله‌ی کشی برای معادله‌ی (۱-۱۳) ممکن است وجود نداشته باشد و همچنین ممکن است بی‌نهایت جواب متمایز داشته باشد. در زیر قضیه‌ی وجود ویکتایی جواب مسئله‌ی کشی بیان شده است.

۱-٤-۱ قضیه. معادله‌ی دیفرانسیل جزئی شبه‌خطی مرتبه‌ی اول را که در (۱-۱۳) تعریف شد، با دامنه‌ی Ω در نظر بگیرید که در آن $a,b,c\in C^1(R)$. فرض کنید منحنی اولیه‌ی Γ را به صورت زیر پارامتری شده باشد

$$\Gamma:\begin{cases} x=x_0(s) \\ y=y_0(s) & \qquad 0\le s\le 1. \\ u=u_0(s) \end{cases}$$

اگر $\frac{dx_0}{ds}b(x_0(s),y_0(s),u_0(s))-\frac{dy_0}{ds}a(x_0(s),y_0(s),u_0(s))\neq 0$ آنگاه جواب یکتایی در همسایگی منحنی اولیه Γ وجود دارد به طوری که هم در معادله‌ی (۱-۱۳) و هم در شرط اولیه صدق می‌کند.

برهان. [۳۲] را ببینید.

اگر چه در اینجا این روش را برای معادلات شبه خطی بیان کردیم اما می‌توان آن را برای معادلات خطی، تقریباً خطی و حالتهای خاص معادلات غیرخطی نیز به کار برد.

۱-۴-۲ مثال. مساله کشی را برای معادله‌ی شبه‌خطی زیر حل کنید

$$uu_x + yu_y = x$$
$$u(x,1) = 2x$$

شرط اولیه Γ را می‌توان با $(s,1,2s)$ پارامتری کرد، طبق روش مشخصه، دستگاه (۱-۱۴) و شرایط (۱-۱۵) به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{dy}{dt} = y \\ \frac{du}{dt} = x \end{cases}$$

$$x(s,0) = s \qquad , \qquad y(s,0) = 1 \qquad , \qquad u(s,0) = 2s$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی دوم دستگاه فوق داریم $y = C_1(s)e^t$ و با توجه به شرط $y(s,0) = 1$ داریم $y = e^t$

همچنین با استفاده از معادلات اول و سوم دستگاه داریم

$$\frac{d(x+u)}{dt} = u + x \quad \Rightarrow \quad Ln(x+u) = t + C_2(s) \quad \Rightarrow \quad x + u = C_2(s)e^t$$
$$\frac{d(x-u)}{dt} = u - x \quad \Rightarrow \quad Ln(x-u) = -t + C_3(s) \quad \Rightarrow \quad x - u = C_3(s)e^{-t}$$

لذا با حل دستگاه متشکل از دو معادله‌ی فوق u, x به صورت زیر به دست می‌آیند

$$x = \frac{1}{2}[C_2(s)e^t + C_3(s)e^{-t}]$$
$$u = \frac{1}{2}[C_2(s)e^t - C_3(s)e^{-t}]$$

با استفاده از شرایط اولیه $x(s,0) = s$ و $u(s,0) = 2s$ خواهیم داشت