بسم الله الرّحمن الرّحيم

دانشگاه شهید بهشتی
«دانشکدهٔ علــوم»

پایان‌نامه :

برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

«فیزیک»

موضـوع :

کوانتیزه کردن سیستم‌های هامیلتونی مقید به روش BRST

استاد راهنما :

دکتر محمدعلی جعفریزاده

نگارش :

فرهــاد دارابــی

اسفند ۱۳۷۱

فهرست مطالب
****

عنوان	صفحه
*****	*****

به یاد:

پدر

سعید

جواد

وافسانه

تقدیم به:

مادر

همسر فداکار

و خانواده خوبم

که همواره پشتیبانم بوده‌اند.

با تقدیر و تشکر فراوان از استاد محترم

جناب آقای دکتر محمد علی جعفریزاده

که بدون راهنمایی‌های ایشان امکان

نگارش این پایان نامه میسر نبود

عنوان	صفحه
*****	****

عنوان	صفحه
*****	*****

عنوان	صفحه
*****	*****

چکیده :

نظریه‌هائی که دارای ناوردایی محلی هستند به نظریهٔ سیستم‌های مقید معروفند. درواقع، قیود سیستم چیزی به جز مولدهای تبدیلات پیمانه‌ای بی‌نهایت کوچک نیستند. کوانتیزه کردن سیستم‌های مقید بصورت طبیعی، تحت عنوان کوانتیزه کردن بچی ـ روت ـ استورا ـ تیوتین BRST توسط فرادکین ـ باتالین ـ ویلکوویسکی فرمولبندی شده است.

دیدگاه اصلی این روش، در این واقعیت نهفته است که ناوردایی های محلی اولیه با تعمیم فضای فاز به متغیرهای گوست، به یک ناوردایی همه‌جایی منفرد تبدیل می‌شود. این ناوردایی همه‌جایی (تقارن BRST) توسط مولد BRST بوجود می‌آید. این مولد، پوچ توان بوده و قیود اولیه و خصوصیات جبری آنها در درون این مولد مستتر است. روش کوانتیزه کردن BRST همانند هر روش کوانتیزه کردن دیگر، بیشتر یک تکنیک است تا یک نظریه. تبدیلات پوچ توان و کنش ناوردا، یک نظریه کوانتومی یونیتاری، با مشاهده‌پذیرهای مستقل از انتخاب پیمانه را تعریف می‌کنند. بعلاوه روش BRST بازبهنجاربودن نظریهٔ یانگ ـ میلز را برای یک کلاس کلی از پیمانه‌ها نشان می‌دهد.

مقـــدمـــه :

اززمانی که مدل استاندارد نظریهٔ قابل قبول برای اندرکنش های الکترو- مغناطیس ،ضعیف‌وقوی شناخته‌شده‌است ،فرض براین است که‌نظریهٔ بنیادی همه چیزبایدیک نظریه‌پیمانه‌ای باشد .نظریه‌های پیمانه‌ای برای اندرکنش‌های الکتروضعیف ،قوی وگرانشی متعلق به‌کلاس سیستم‌های مقیدهستند .سیستم‌های مقیدبطورسستماتیک ،برای اولین بارتوسط دیراک ،موردمطالعه‌قرارگرفته‌اند(۱). ساختارسیستم‌های مقیدبراساس فرمولبندی هامیلتونی تعمیم‌یافته‌درمکانیک کلاسیک استوار است که‌دراین فرمولبندی به مجموعهٔ کاملی ازقیودکلاس اول وقیود کلاس دوم‌دست می‌یابیم .معلوم می‌شودکه‌قیودکلاس اول هم‌ارزبانظریه‌های پیمانه‌ای بوده‌وکوانتیزه‌کردن سیستمی باقیودکلاس اول بصورت اعمال شرایط قیدی روی فضای هیلبرت صورت می‌گیرد .قیودکلاس دوم منجربه‌حذف برخی درجات آزادی می‌گردد . وکوانتیزه‌کردن سیستمی باقیودکلاس دوم‌ازطریق تعریف دیراک - براکت وتبدیل آن به‌جابجاگرصورت می‌پذیرد .کوانتیزه‌کردن سیستم‌های مقیدکلاس اول به‌روش انتگرال مسیر ،نخست توسط فادیف (۲) مطرح گردیده‌است .دراین روش ،ناوردائی پیمانه‌ای بصورت آزادی درانتخاب شرایط پیمانه‌ای توجیه می‌شود .

فادیف - پوپوف (۳) درتلاش برای کوانتیزه‌کردن انتگرال مسیـــری و هموردای نظریه‌پیمانه‌ای میدان یانگ - میلزکه‌باانتخاب شرط پیمانــه‌ای ناوردای لورنتس صورت می‌گرفت ،به‌لزوم معرفی متغیرهای غیرفیزیکی بنــام متغیرهای گوست پی بردند .دراین روش با معرفی یک دترمینان به مــرز تابعی انتگرال مسیر ،طوری که‌گروه‌تبدیلات پیمانه‌ای راازفضای پتانسیل های برداری

خارج می‌نماید، ناوردایی پیمانه‌ای لاگرانژی، توجیه گردیده و با نوشتن دترمینان درشکل نهایی به منظور بدست آوردن کنش موثر، میدانهای گوست درلاگرانژی ظاهرشده و ناوردایی پیمانه‌ای کنش موثر از بین می‌رود. لیکن همانطورکه برای اولین بار توسط بچی ـ روت ـ استورا (۴) وتیوتین (۵) عنوان گردید، این کنش موثردارای یک تقارن همه‌جایی جدیدبنام تقارن BRST است وتبدیلات BRST میدانهای گوست را با سایرمیدانها درهم می‌آمیزد. این کشف، اهمیت متغیرهای گوست راآشکارترمی‌ساخت، زیرا روشن می‌گردیدکه می‌بایست کلیه میدانها، اعم از گوست‌ها را بعنوان مولفه‌های متفاوت یک چیزهندسی درنظرگرفت. این دیدگاه ازتعمیم‌منطقی ایدهٔ ناوردایی پیمانه‌ای نشئت می‌گیرد. نیاز به گوست‌ها و تقارنی که اهمیت آنها راآشکار می‌کند، نخست درمکانیک کوانتوم مطرح گردیده است. بعدها معلوم گردیدکه گوست‌ها جایگاه طبیعی درمکانیک کلاسیک دارند.

درواقع تقارن BRST، می‌توانست درقرن گذشته با مضمون کاملا"کلاسیکی، توسط ریاضیدانانی که با هندسهٔ فضای فازسروکار داشته‌اند، کشف شود. تنها چیزی که لازم‌بود، تعمیم‌تحلیلی به متغیرهای گراسمن بوده است. البته منظوراز این بیان اصرار براین نیست که گوست‌ها می‌بایست مفهوم‌صریح فیزیکی درمکانیک کلاسیک داشته باشند، لیکن بسیارمفیدوبجاست که تقارن BRST بطورکلاسیکی موردمطالعه قراربگیردوسپس مفهوم‌تقارن BRST را بعنوان یک وسیلهٔ قدرتمنددرساختار نظریهٔ کوانتومی بکاربست.

بررسی سیستماتیک تقارن BRST توسط فرادکین ـ باتالین ـ ویلکوویسکی صورت گرفته است. اولین بار سیستم‌های عمومی با قیودکلاس اول بوزونی توسط فرادکین ـ ویلکوویسکی (۶) بررسی شده‌اند. آنها درتلاش برای ترکیب همزمان دواصل هموردایی نسبیتی ویونیتاریتی درزیرفضای فیزیکی سیستم‌مقیدکلاس اول با معرفی شرط پیمانه‌ای نسبیتی به‌شکل عمومی از S ماتریس یونیتاری دست یافتند، طوری که ضرایب لاگرانژوممنتوم‌های مزدوج نیزمتغیرهای دینامیکی محسوب شده وفضا گسترش می‌یابد. بدین ترتیب آنها به فرمولبندی کانونیک دریک فضای فازبزرگتررسیدند، طوری که هم‌ارزی با سیستم‌اولیه مقیدبواسطهٔ معرفی یک

فضای بزرگترشامل گوستها حاصل میگردید. آنها درطی یک قضیه، شکل صریح هامیلتونی حاکم براین سیستم درفضای فازتعمیم یافته راازلزام یونیتاریتی در زیرفضای فیزیکی، بطورمنحصربفردتعیین کردند. باتالین ـ ویلکوویسکی (۷) درتلاشی دیگرقضیهٔ فوق را به کلی ترین حالت سیستمهای نسبیتی با قیودکلاس اول بوزونی وفرمیونی با جبرباز وباهرشکلی ازانتخاب پیمانه تعمیم دادند. آنها با فرض یک مولدفرمیونی پوچ توان Ω و هامیلتونی یونیتاری H درابرفضای فاز شامل متغیرهای گراسمن، ناوردایی S ماتریس راتحت انتخاب هرپیمانه دلخواه ازطریق یک تابع فرمیونی اثبات نمودند. بعداً فرادکین ـ فرادکینا (۸) شکل صریح مولدفرمیونی وهامیلتونی رابرحسب قیودکلاس اول وثابتهای ساختاری ارائه دادند. این مولدفرمیونی، همان مولدتبدیلات ابرتقارنی BRST است که میدانهای گوست راباسایرمیدانها درهم میآمیزد. درواقع، براساس این قضیه کلی میتوان درحالات خاص انتخاب تابع تثبیت پیمانه فرمیونی، به نمایشهای متفاوت ومعادل فادیف ـ پوپوف دست یافت وتبدیلات ابرتقارنی BRS اولیه درموردمیدان یانگ ـ میلزرا بصورت حالت خاص این تبدیلات کلی ابرتقارنی با مولدفرمیونی Ω بدست آورد. بدین ترتیب کوانتیزه کردن سیستمهای دینامیکی نسبیتی مقیدکلاس اول، درحالت کلی بااستفاده ازانتگرال مسیردرفضای فاز نسبیتی انجام میپذیرد. کوانتیزه کردن این سیستمها بطریق عملگری نیزتوسط باتالین ـ فرادکین (۹) صورت گرفته است، که روشی برای ساختن عملگر هامیلتونی یونیتاری بصورت بسط برحسب عملگرهای گوست دریک نظم مشخص ارائه داده اند. بایدگفت، سیستمهای مقیدازهرنوع کلاس اول وکلاس دوم را میتوان از روش BRST کوانتیزه نمود، زیرا معلوم شده است (۱۰) که میتوان سیستم با قیود کلاس دوم را به سیستم با قیودکلاس اول معادل تبدیل نمود.

امروزه حوزهٔ عمل روشهای BRST فراتر ازانگیزهٔ اولیه میرود و تقارن BRST نقش اساسی درنظریهٔ میدان ریسمان پیداکرده است.

این پایان نامه بصورت زیرفصل بندی شده است.

درفصل اول نظریهٔ هامیلتونی تعمیم‌یافتهٔ دیراک برای سیستم‌های مقید و نحوهٔ کوانتیزه‌کردن این سیستم‌ها ارائه می‌گردد. معلوم می‌شودکه سیستم‌های مقید، اساساً دارای دودستهٔ قیودکلاس اول وکلاس دوم‌هستند. قیودکلاس اول هم‌ارز با نظریهٔ پیمانه‌ای است، درصورتی که قیودکلاس دوم‌چنین نیستند. نحوهٔ کوانتیزه کردن این دودسته قیودبطورمتفاوت ازهم‌صورت می‌گیردولی این دودسته قیود اساساً ازهم‌متمایزنبوده وبه روشهایی قابل تبدیل به‌همدیگرند. کوانتیزه‌کردن فضای فازتقلیل یافته نیزبه‌دوروش کانونیک وانتگرال مسیردرفضای موردمطالعه قرارمی‌گیرد.

درفصل دوم‌چندمثال براساس فرمولبندی دیراک موردمطالعه قرارگرفته‌و کوانتیزه می‌شوند. نخست، میدان الکترومغناطیس دردوپیمانه تشعشعی و Axial موردمطالعه قرارمی‌گیردوبصورت سیستم‌مقیدکلاس دوم‌کوانتیزه می‌شود. سپس بوزون‌های کایرال دردوبعدنیزبطریق سیستم‌مقیدکلاس دوم‌کوانتیزه می‌شودودرنهایت ذرهٔ اسکالرنسبیتی وریسمان بوزونی ازدیدگاه‌سیستم‌مقیدکلاس اول بررسی شده‌و کوانتیزه‌کردن آنها انجام می‌پذیرد.

درفصل سوم‌ساختارغنی سیستم‌های مقیدکلاس اول موردبررسی واقع می‌شود. نشان داده می‌شودکه‌توابع ساختاری دریک سری اتحادهای مفیدوبا ارزش صدق می‌کنند، طوری که‌وجودتقارن BRST برای هرنظریه‌پیمانه‌ای تضمین می‌شود.

درفصل چهارم‌اساس‌کلاسیکی تقارن BRST را موردمطالعه‌قرارمی‌دهیم. در این فصل فضای فازطوری تعمیم‌می‌یابدکه‌شامل متغیرهای گراسمن گردد. سپس شکل صریح مولدتبدیلات BRST رابراساس‌خاصیت پوچ توانی پیداکرده‌ومشاهده‌پذیرهای ناوردای BRST رامعرفی می‌کنیم. هموردایی کانونیک ساختارتقارن BRST نیزکه‌منجربه‌اثبات جدیدی برای وجودمولدتبدیلاتBRST می‌شود، به‌کمک متغیرهای گراسمن اثبات می‌گرددودرنهایت بابررسی کوهومولوژی کلاسیک تبدیلات پوچ توان BRST یک کلاس‌هم‌ارزی برای مشاهده‌پذیرها تعریف می‌شود.

فصل اول:

فرمولبندی هامیلتونی تعمیم یافته و کوانتیزه کردن سیستم‌های مقید

۱-۱- مقدمه

دراستای فرمولبندی ها میلتونی سیستم مقید به مجموعه کاملی از قیود کلاسیکی دست می یابیم، که وقتی تا حد عملگرهای کوانتومی ارتقاء یابند، فضای هیلبرتی را که عملگرها میلتونی روی آن عمل میکند، تعریف میکنند.

دراین فرمول بندی، مجموعه کامل قیود بطورطبیعی حاصل میشوند وساختار یک نظریه پیمانه‌ای را میسازند. روشی که دراین اینجا براساس فرمولبندی ها میلتونی ارائه میشود به فرمولبندی دیراک معروف است.(۱)

دزآغاز فرمولبندی ها میلتونی به اصل کنش متوسل میشویم. مزیت این کار این است که براحتی میتوان نظریه بدست آمده را نسبیتی نمود. با داشتن یک اصل کنش، یک تابع لاگرانژ را اختیار داریم که اگر نحوه تبدیل از تابع لاگرانژ به تابع ها میلتونی را بدانیم، گامی به سوی کوانتیزه کردن سیستم برداشته ایم. سوالی که ممکن است مطرح شود، این است که چرا نقطه آغاز را خود تابع ها میلتونی نمیگیریم؟ جواب این است که بنا نهادن یک نظریه نسبیتی با استفاده از ها میلتونی همواره به سادگی انجام پذیر نیست، درصورتی که با اعمال شرط ناوردائی کنش تحت تبدیلات لورنتس همواره یک نظریه نسبیتی داریم.

۱-۲- قیود اولیه[1]

برای سادگی، سیستمی با تعداد درجات آزادی محدود را درنظر میگیریم. بدیهی است که یک نظریه میدان با تعداد درجات آزادی نامحدود به راحتی با روشهای معمولی قابل حصول است. در آغاز بحث، رفتن از فرمولبندی لاگرانژی به فرمولبندی هامیلتونی را برای یک سیستم غیرمقید بررسی میکنیم. کنش را به صورت انتگرال زیر معرفی میکنیم.

$$S = \int L(q^n(t), \dot{q}^n(t))\ dt \qquad (1-1)$$

که L تابع لاگرانژی از مختصات q^n وسرعتهای $\dot{q}^n$ است.

با اکسترمم کردن این انتگرال $(\delta S = 0)$ به معادلات حرکت لاگرانژ میرسیم.

$$\frac{\partial L}{\partial q^n} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right) = 0 \qquad (2-1)$$

این معادلات دیفرانسیل از مرتبه دوم هستند. برای یافتن معادلات مرتبه اول معادل، ممنتوم مزدوج q^n را معرفی میکنیم.

$$P_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \qquad (3-1)$$

هامیلتونی را با تبدیل لژاندر زیر تعریف میکنیم (طبق قاعده اینشتین اندیس تکراری نشانگر جمع روی آن اندیس است)

$$H_0(P_n, q^n) = P_n \dot{q}^n(P_n, q_n) - L(q^n, \dot{q}^n(P_n, q^n)) \qquad (4-1)$$

که طبق معادله (۱-۳) سرعتهای $\dot{q}^n$ تابعی از q^n و p_n درنظرگرفته شده اند. با درنظرگرفتن تغییرات مستقل δq^n و δp_n تغییرات کنش بصورت زیر خواهد بود.

$$\delta S = \int dt \left(\dot{q}^n \delta P_n - \dot{P}_n \delta q^n - \frac{\partial H_0}{\partial P_n}\delta P_n - \frac{\partial H_0}{\partial q^n}\delta q^n\right)$$

1. Primary Constraints