
إنه من سليمان وإنه
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه‌ی دکتری رشته‌ی ریاضی گرایش جبر

خاصیت بازنویسی پذیری گروه ها

استادان راهنما:
دکتر علیرضا عبدالهی
دکتر علی‌اکبر محمدی حسن آبادی

پژوهشگر:
اسداله فرامرزی ثالث

آذر ماه ۱۳۸۸

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی محض (نظریه گروهها) آقای اسدا.. فرامرزی ثالث

تحت عنوان:

خاصیت بازنویسی پذیری گروه ها

در تاریخ ...۸۸/۹/۲..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...بسیار خوب........ به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علیرضا عبدالهی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی اکبر محمدی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر جواد باقریان	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور داخل گروه	دکترسعید اعظم	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۵- استاد داور خارج گروه	دکتر محمدرضا درفشه	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۶- استاد داور خارج گروه	دکتر بیژن طائری	با مرتبه علمی استاد	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

قدردانی و تشکر

شکر نعمت، نعمتت افزون کند   کفر نعمت، نعمتت از کف برد

سپاس خدایی را که ستایش و سپاس برازنده اوست. سپاس جاودانگی و عظمتی را که روح انسان را به لطف رحمت خود جاودانه کرد. سپاس و درود بیکران آن بیکرانی را که دل انسان را ظرفیت بیکران عطا کرد. سپاس خالق یکتایی را که روزهای داغ و سوزان تابستان عمرم را به سایه و نسیم پر پروانه ها، پدرم آن مرد خستگی ناپذیر و مادرم آن آیه مهر الهی، دلنشین و مطبوع نمود. سپاس فراوان آن کمال را که سکینه دلم را مدیون صبوری و همراهی همسری فداکار و دختری فرشته سیرت، فرمود. سپاس خداوند ابر های رحمت و بشارت را که ابر های باران ، برادران ، خواهران و دوستانم، را آفرید تا با بارش باران همیاری و همدردی غبار و آلودگی های مسیر حرکتم زلال و شفاف گردد. شکر آن ایزد دانایی را که شبهای یلدای تحصیلاتم را در کرسی پر حرارت اساتید گرانقدر، معلمان علم و اخلاق، دکتر علیرضا عبدالهی، دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی و دکتر شکراله سالاریان، گرم ونورانی کرد.

تقدیر و تشکر می کنم از:

پدرو مادرم، که روح مبارزه با مشکلات را در من تقویت کردند.

همسر و دخترم، که پابه پای من این مسیر پر پیچ و خم را صبورانه طی کردند.

برادران و خواهرانم، که با زدودن غبار غم های زندگی تشویقم کردند.

دوستانم، قدیرعلی سلطانی، رحیم ذوالفقاری نسب، ابوالقاسم بیات، یداله بیات، عبداله بهرامی، یداله بهرامی، علی ندیری، سعید ابراهیمی؛ محمد درویشی، حسن خسروی، عبدالناصر بهلکه، عزیزاله آزاد، بابک بهزادی، مصطفی شاکر و....، که دوستی را در حقم به اتمام رساندند.

زحمات فراوان آقایان رضایی و تسلیمی و خانم ها غازی، فرهمند و گرامی.

اساتیدم Patrizia Longobardi و Mercede Maj

دوستانم Carmela Sica و Maria Tota که مرا در فرصت تحقیقاتی مدیون همکاری های صمیمانه خود کردند.

تقدیم به:

روح پاک **پدرم**،

زنده و جاوید

مهر ناب **مادرم**،

الهه امید

دلسوزی و همدردی و صبوری **همسرم**

تابنده تر از خورشید

دخترم **پرنیا**

ترنم غزلهای سپید

چکیده :

در این پایان نامه خاصیت جایگشت پذیری و بازنویسی پذیری گروه ها را مورد بررسی قرار می دهیم. ثابت می کنیم که:

۱) هر گروه آبلی –بواسطه –دوری، دارای خاصیت ۳-بازنویسی پذیری است اگروفقط اگر یک زیر گروه آبلی با شاخص ۲ داشته باشد یا مرتبه زیر گروه مشتق آن کمتر از ۶ باشد.

۲) هر ۲-گروه پوچ توان از رده ۲، دارای خاصیت ۳-بازنویسی پذیری است اگروفقط اگر یک زیر گروه آبلی با شاخص ۲ داشته باشد یا مرتبه زیر گروه مشتق آن کمتر از ۵ باشد.

۳) هر گروه پوچ توان از رده ۲، دارای خاصیت ۳-بازنویسی پذیری است اگروفقط اگر یک زیر گروه آبلی با شاخص ۲ داشته باشد یا مرتبه زیر گروه مشتق آن کمتر از ۶ باشد.

در سال ۱۹۷۵ پل اردوش سوالی را مطرح کرد: اگر در یک گروه نامتناهی همه زیر مجموعه های با عناصر دو به دو جابجا نشونده، متناهی باشند آیا می توان کران بال برای عدد اصلی چنین مجموعه هایی یافت؟ در سال ۱۹۷۶ نویمن به آن پاسخ مثبت داد. سوال اردوش را در جهت دیگری در نظر می گیریم و ثابت می کنیم که: یک گروه نامتناهی در واریته تعریف شده توسط قانون $w(y_1, y_2, \dots, y_m) = 1,$ قرار دارد اگروتنها اگر به ازای هر m زیر مجموعه نامتناهی X_1، X_2، $\cdots$، X_m از گروه، اعضای $x_i \in X_i$ برای $(i=1, 2, \dots, m)$ وجود داشته باشد که $w(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1$. کلمه w به صورت حاصل ضرب چند کلمه مجزا است، به این معنی که کلمه ها از گروه های آزاد تعریف شده روی مجموعه های مجزا بوده و کلمه ها به فرم $w(y_1, y_2, \dots, y_m) = {y_1}^{\alpha_1} {y_2}^{\alpha_2} \cdots {y_t}^{\alpha_t}$ می باشند که در آن فقط یکی از حروف y_i در چند مکان تکرار شده و بقیه حروف فقط در یک مکان ظاهر شده اند.

کلمات کلیدی: خاصیت بازنویسی پذیری، خاصیت جایگشت پذیری، واریته برنساید و خاصیت ترکیباتی.

فهرست مندرجات

مقدمه

در این پایان نامه G همواره یک گروه می‌باشد. فرض کنید x و y دوعضو از G باشند. هرگاه $xy = yx$ یا به‌طور معادل $[x, y] = ۱$ گوییم آن دو عضو باهم جابجا می‌شوند. اگر گروهی همهٔ اعضایش دوبه‌دو جابجا شوند آنرا آبلی گوییم. این گروه‌ها در نظریهٔ گروه‌ها از اهمیت زیادی برخوردار هستند. به‌همین دلیل مطالعهٔ این موضوع در جهت‌های مختلفی انجام گرفته است. از جمله گروه‌های انگل و گروه‌های n‌–انگل که در آنها هر دو عضو $x, y \in G$ باید در شرط $[x, ny] = [[x, (n-۱)y], y]$=1 صدق کند، اگر $n = ۱$، همان خاصیت آبلی بودن حاصل می‌شود.

تعمیم دیگر از گروه‌های آبلی، گروه‌های حل‌پذیر است. گروه G حل‌پذیر از ردهٔ n است اگر وفقط اگر $G^{(n)} = ۱$، که $G^{(n)}$ زیرگروه مشتق nام گروه G است و به‌صورت استقرائی تعریف می‌شود:

$$G^{(n)} = [G^{(n-۱)}, G^{(n-۱)}] \quad \text{و} \quad G^{(۰)} = G$$

به‌ویژه برای $n = ۱$ داریم $G^{(۱)} = [G, G] = \langle [x, y] : x, y \in G \rangle$ که همان G' است، و می‌دانیم که اگر $G' = ۱$، آنگاه G آبلی است. به طور مشابه گروه های پوچ‌توان نیز تعمیمی از گروه‌های آبلی هستند. گروه G را پوچ‌توان از ردهٔ n گوییم اگروفقط اگر $Z_n(G) = G$، که در آن $Z_n(G)$ به‌طور استقرائی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$Z(G/Z_{(n-۱)}(G)) = Z_n(G)/Z_{(n-۱)}(G) \text{ و } Z_۰(G) = \langle e \rangle \text{ زیرگروه بدیهی است}$$

به‌ویژه برای $n = ۱$ داریم $Z(G)/\langle e \rangle = Z(G/\langle e \rangle) = Z(G/Z_۰(G)) = Z_۱(G)/Z_۰(G)$ همان مرکز گروه G است. می‌دانیم که اگر $Z(G) = G$، آنگاه G آبلی است.

یکی دیگر از تعمیم گروه‌های آبلی که مورد علاقهٔ ما بوده و در فصل اول این پایان نامه به معرفی کامل آن پرداخته شده است، گروه‌های بازنویسی‌پذیر است که به صورت زیر تعریف می شود.

گروه G را n—بازنویسی‌پذیر گوییم هرگاه برای هر n عنصر $x_۱$، $x_۲$، …، x_n از G، جایگشت‌های σ و τ از S_n وجود داشته باشند که:

$$x_{\sigma(۱)}x_{\sigma(۲)}\cdots x_{\sigma(n)} = x_{\tau(۱)}x_{\tau(۲)}\cdots x_{\tau(n)} \quad \text{و} \quad \sigma \neq \tau.$$

کلاس گروه‌های n—بازنویسی‌پذیر را با نماد Q_n نشان می‌دهیم. در حالتی که یکی از جایگشت‌های σ و τ جایگشت همانی باشد، گروه G را n—جایگشت‌پذیر گوییم. واضح است که برای $n = ۲$ همان خاصیت جابجائی حاصل می‌شود. کلاس گروه‌های n—جایگشت‌پذیر را با نماد P_n نشان می‌دهیم.

در فصل سوم این پایان نامه $Q_۳$—گروه‌های آبلی—بواسطه—دوری را رده‌بندی کرده ونشان داده‌ایم که یک گروه آبلی—بواسطه—دوری G دارای خاصیت $Q_۳$ است اگروفقط‌اگر یک زیرگروه آبلی با شاخص دو داشته باشد یا زیرگروه مشتق آن از مرتبهٔ کمتر از ٦ باشد(ر.ک. [۳۰]).

در فصل چهارم این پایان نامه گروه‌های پوچ‌توان از ردهٔ ۲ در $Q_۳$ مورد مطالعه قرار داده رده‌بندی زیر را به‌دست آورده‌ایم. فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان از ردهٔ ۲ باشد. دراین‌صورت $G \in Q_۳$ اگروفقط‌اگر یک زیرگروه آبلی با شاخص دو داشته باشد یا زیرگروه مشتق آن از مرتبهٔ کمتر از ٦ باشد (ر.ک. [۳۰]).

مطالعهٔ دیگری که در این پایان نامه انجام گرفته و در جهتی دیگر خاصیت جابجائی را مورد توجه قرار داده، برخواسته از سوالی است که پل اردوش [۱] در سال ۱۹۷۵ مطرح کرد.

سوال: اگر در یک گروه نامتناهی همهٔ زیرمجموعه‌های با عناصر دوبه‌دو جابه‌جا نشونده، متناهی باشند آیا یک کران بالای متناهی برای عدد اصلی چنین مجموعه‌هایی وجود دارد؟

یک کلاس از گروه‌ها مجموعه‌ای از گروه‌ها است که شامل گروه بدیهی بوده و نسبت به یکریختی بسته باشد. کلاس گروه‌های آبلی را با $\mathcal{A}$ و کلاس گروه‌های متناهی را با $\mathcal{F}$ نشان می‌دهیم. یک واریته یک کلاس از گروه‌ها است که در قانونی مثل $w = ۱$ صدق کند. برای مثال واریتهٔ گروه‌هائی که در $w = x^d = ۱$ صدق می‌کند را واریتهٔ برنساید [۲] نامیده و آنرا با نماد $\mathcal{B}_d$ نشان می‌دهیم. بعد از پاسخ نویمن [۳] به سوال اردوش تلاش‌های زیادی در این راستا انجام گرفته و تعمیم‌هائی از سوال اردوش ناشی

[۱] P.Erdös
[۲] Burnsid
[۳] B. H. Neumann

شده است، از جمله سوال ۱ در زیر که توسط لانگباردی [4] و همکارانش [۳۸] مطرح شده است.

فرض کنیم F گروه آزاد روی مجموعهٔ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ و w یک کلمه در آن باشد و فرض کنید $\mathcal{V}(w)$ واریتهٔ گروه‌های تعریف شده با $w = 1$ باشد. کلاس همهٔ گروه‌های G که در آن برای هر n زیرمجموعهٔ نامتناهی Y_1، Y_2، ...، Y_n، عناصر $y_i \in Y_i$ وجود دارند به‌طوری‌که $w(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 1$، را با نماد $\mathcal{V}(w^*)$ نشان می‌دهیم. کلاس‌های $\mathcal{V}_\infty(w)$ و $\mathcal{V}_m(w)$ از گروه‌ها را به‌صورت زیر تعریف می کنیم: گروه G در کلاس $\mathcal{V}_\infty(w)$ قرار دارد اگروفقط‌اگر هر زیر مجموعهٔ نامتناهی X از G شامل n عضو (متمایز) x_1، x_2، ...، x_n باشد به‌طوری‌که $w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$، و گروه G در کلاس $\mathcal{V}_m(w)$ قرار دارد اگروفقط‌اگر هر زیر مجموعهٔ m عضوی X از G شامل n عضو (متمایز) x_1، x_2، ...، x_n باشد به‌طوری‌که $w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$.

سوال ۱: آیا تساوی $\mathcal{V}(w) \bigcup \mathcal{F} = \mathcal{V}(w^*)$ برای هر کلمهٔ w برقرار است ؟

فرض کنید $\mathcal{V}(w)$ و $\mathcal{V}(u)$ دو واریته از گروه‌ها باشند که به‌ترتیب با قوانین $w(x_1, \ldots, x_n) = 1$ و $u(y_1, \ldots, y_m) = 1$ تعریف شده‌اند. در راستای جواب به سوال فوق دیلیزیا[5] در[۲۶] سوال زیر را مطرح کرد:

سوال ۲: اگر $\mathcal{V}(w) = \mathcal{V}(u)$، آیا $\mathcal{V}(w^*) = \mathcal{V}(u^*)$؟

در بخش چهارم از فصل اول این پایان نامه مروری بر تلاش‌های انجام گرفته برای پاسخ به سوال‌های ۱ و ۲ مروری شده است و در بخش دوم از فصل دوم (ر.ک. [۲۹]) برای کلمهٔ $\mathbf{w}$(معرفی شده در بخش اول از فصل دوم) به سوال ۲ پاسخ مثبت داده شده و نشان داده شده است که:

$$\mathcal{V}(\mathbf{w}^*) = \mathcal{B}_d^*.$$

اندیمیونی [1] در مطالعهٔ کلاس گروه‌های $\mathcal{V}_\infty(w)$ سوال زیر را مطرح کرد:

سوال ۳: فرض کنید w یک کلمه دلخواه باشد و G یک گروه نامتناهی از $\mathcal{V}_\infty(w)$. آیا عدد صحیح مثبت m وجود دارد به‌طوری‌که $G \in \mathcal{V}_m(w)$؟

در بخش سوم از فصل دوم این پایان نامه (ر.ک. [۲۹]) برای کلمهٔ $\mathbf{w}$ (معرفی شده در بخش اول

[4] P. Longobardi
[5] C. Delizia
[1] G. Endimioni

از فصل دوم) سوال ۳ را جواب داده و نتیجهٔ زیر را به‌دست آوردیم:

فرض کنید G یک گروه نامتناهی باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزاند:

(۱) $G \in \mathcal{V}_{\infty}(\mathbf{w})$؛

(۲) $G \in \mathcal{B}_{(e_1+e_2+\cdots+e_n)} \bigcap (\mathcal{FB}_d)$؛

(۳) برای یک عدد صحیح m، $G \in \mathcal{V}_m(\mathbf{w})$.

که در آن e_i مجموع توان‌های حرف x_i در کلمه $\mathbf{w}$ است.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل برخی تعاریف و قضایایی که در اثبات قضایای فصل‌های بعدی به‌کار می‌رود بیان شده‌اند. این فصل را در چهار بخش تدوین کرده‌ایم. در بخش اول مفاهیم کلی و مقدماتی را بیان کرده‌ایم، در بخش دوم به بررسی ساختار گروه‌های جابگشت‌پذیر پرداخته‌ایم. در بخش سوم گروه‌های بازنویسی‌پذیر را معرفی کرده که در فصل‌های سوم و چهارم به‌طور کامل بررسی شده‌اند. بخش چهارم مطالب مورد نیازی است که برای بررسی خواص ترکیباتی معینی از گروه‌ها از جمله بررسی سوال اردوش [1] و تعمیم‌های آن که در فصل دوم بحث شده است. با توجه به این‌که اثبات بسیاری از این قضایا در کتب مربوطه آمده است، تنها به ذکر منابع اکتفا می گردد.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

فرض کنید G یک گروه باشد. مرکزساز عضو $x \in G$ را با نماد $C_G(x)$ و مرکز G را با نماد $Z(G)$ نشان می‌دهیم. منظور از $o(x)$ یا $|x|$، مرتبهٔ عضو $x \in G$ می‌باشد. اگر در گروه G مرتبهٔ تمام عناصر متناهی باشد آن را گروه تابدار گوییم و اگر مرتبهٔ تمام عناصر نامتناهی باشد آن را گروه بدون‌تاب یا آزادتاب گوییم.

---

[1] P. Erdös

فرض کنیم مرتبهٔ عناصر گروه G کران‌دار باشد. دراین‌صورت نمای گروه G کوچک‌ترین مضرب مشترک مرتبهٔ عناصر گروه G می‌باشد که آن را با نماد $exp(G)$ نشان می‌دهند.

گروه G را ساده گوییم هرگاه هیچ زیرگروه نرمال غیربدیهی نداشته باشد، و نیم—ساده گوییم هرگاه هیچ زیرگروه نرمال غیربدیهی آبلی نداشته باشد.

فرض کنید X و Y دو زیرمجموعهٔ ناتهی از G باشند. دراین‌صورت زیرگروه

$$X^Y = \langle x^y = y^{-1}xy | x \in X, y \in Y \rangle$$

را بستارنرمال X در Y گوییم و داریم $X^Y = X^{\langle X,Y \rangle}$. هم‌چنین زیرگروه جابجاگر X با Y را با نماد $[X,Y]$ نشان می‌دهیم که عبارت است از:

$$[X,Y] = \langle [x,y] | x \in X, y \in Y \rangle.$$

به‌وضوح $[X,Y]=[Y,X]$. به‌طور استقرائی تعریف می‌کنیم

$[X_1] = \langle X_1 \rangle$ و برای هر $n > 1$، $[X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}] = [[X_1, X_2, \ldots, X_n], X_{n+1}]$.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. اشتراک تمام زیرگروه‌های ماکسیمال از G را زیرگروه فراتینی G نامیده و آن را با $\Phi(G)$ نشان می‌دهیم.

تعمیم بسیار مفیدی از حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌ها وجود دارد. فرض کنید N یک زیرگروه نرمال و H یک زیرگروه از G باشد به‌طوری‌که $G = HN$ و $H \bigcap N = 1$. دراین‌صورت G را حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم داخلی N و H گوییم و با نماد زیر نشان می‌دهیم:

$$G = H \ltimes N \text{ یا } G = N \rtimes H.$$

هر عضو از G دارای یک نمایش منحصربه‌فردی به‌فرم hn دارد که $h \in H$ و $n \in N$. برای مثال گروه دووجهی $D_{2n} = \langle a, b \mid a^2 = b^n = (ab)^2 = 1 \rangle$ به‌صورت حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم یک گروه دوری از مرتبهٔ n و یک گروه دوری از مرتبهٔ ۲ است، یعنی $D_{2n} \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$. عمل تزویج روی N بوسیله هر عضو $h \in H$ یک خودریختی h^α از Nمی‌دهد و $\alpha : h \mapsto h^\alpha$ یک همریختی از H به $AutN$ است.

برعکس فرض کنید برای هر دو گروه H و N، یک همریختی $\alpha : H \to AutN$ داشته باشیم.

حاصلضرب نیم‌مستقیم خارجی $G = H \ltimes_\alpha N$ (یا $N \rtimes_\alpha H$) مجموعه همهٔ زوج‌های (h,n)، $h \in H$، $n \in N$، باعمل گروه

$$(h_1,n_1)(h_2,n_2) = (h_1h_2, n_1^{h_2^\alpha} n_2).$$

توابع $h \mapsto (h,1_N)$ و $n \mapsto (1_H,n)$ بترتیب یکریختی‌هایی از H به G و از N به G هستند، H^* و N^* را تصویر همریخت آنها قرار دهید که دراین‌صورت $H \cong H^*$ و $N \cong N^*$. چون $(h,n) = (h,1_N)(1_H,n)$، داریم $G = H^*N^*$، $H^* \bigcap N^* = 1$ و $N^* \lhd G$، یعنی G حاصلضرب نیم مستقیم داخلی H و N است که ما آن را با $G = H \ltimes N$ نشان داده و حاصلضرب نیم مستقیم گوییم.

با در نظر گرفتن عمل طبیعی $Aut(G)$ روی G، حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم $HolG = (AutG) \ltimes G$ را تمام‌ریخت G گوییم.

یک کلاس از گروه‌ها، یک خانواده $\mathcal{X}$ از گروه‌ها است که شامل گروه بدیهی بوده و اگر $G \in \mathcal{X}$ و $H \cong G$ آنگاه $H \in \mathcal{X}$. در اینجا به معرفی کلاس‌هایی از گروه‌ها، که تعمیمی از کلاس گروه‌های پوچ‌توان هستند، و رابطهٔ بین آنها می‌پردازیم.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{X}$ یک خاصیت از گروه‌ها باشد. دراین‌صورت گروه G را موضعاً $\mathcal{X}$−گروه گوییم هرگاه هر زیرگروه با تولید متناهی از G دارای خاصیت $\mathcal{X}$ باشد.

کلاس گروه‌های پوچ‌توان را با $\mathcal{N}$ و کلاس گروه‌های متناهی را با $\mathcal{F}$ نشان می‌دهیم. به‌طور مثال گروه G را موضعاً پوچ‌توان (متناهی) گوییم هرگاه هر زیرگروه باتولید متناهی از آن پوچ‌توان (متناهی) باشد و کلاس گروه‌های موضعاً پوچ‌توان (متناهی) را با $L\mathcal{N}$ $(L\mathcal{F})$ نشان می‌دهیم.

نکته ۳.۱.۱ هر گروه با نمای e، که $e \in \{2,3,4,6\}$، موضعاً متناهی است.

اثبات. ر.ک. [۴۶] صفحه‌های ۴۰۷ − ۴۱۰.

یک خاصیت مهم گروه‌های نامتناهی موضعاً متناهی آن است که:

قضیه ۴.۱.۱ (هال−کالتیلاکا[1] و کارگاپولوف[2]) هر گروه نامتناهی موضعاً متناهی، یک زیرگروه

[1] Hall-Kulatilaka
[2] M. I. Kargapolov

آبلی نامتناهی دارد.

اثبات. ر.ک. [۴٦] صفحهٔ ۴۱۵.

فرض کنید $\mathcal{X}$ یک کلاس از گروه‌ها باشد. دراین‌صورت زیرگروه باقیمانده‌ای $\mathcal{X}$ از G را به‌صورت

$$\bigcap\{N \mid N \trianglelefteq G,\ G/N \in \mathcal{X}\}$$

تعریف می‌کنیم. هرگاه زیرگروه باقیمانده‌ای $\mathcal{X}$ از G بدیهی باشد، G را گروه باقیمانده‌ای $\mathcal{X}$ گوییم. به عبارت دیگر هرگاه برای هر عضو غیر همانی $g \in G$ یک زیرگروه نرمال N وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g \notin N$ و $G/N \in \mathcal{X}$، G را گروه باقیمانده‌ای $\mathcal{X}$ گوییم.

تعریف ۵.۱.۱ یادآوری می‌کنیم که منظور از زیرگروه فیتینگ G، که آن را با $Fit(G)$ یا $F(G)$ نمایش می‌دهیم، زیرگروه تولید شده توسط تمام زیرگروه‌های نرمال پوچ‌توان از گروه G است. اگر $Fit(G) = G$ گروه G را فیتینگ گوییم.

تعریف ٦.۱.۱ یک گروه غیرآبلی G را فراآبلی گوییم هرگاه زیرگروه جابجاگر آن آبلی باشد.

تعریف ۷.۱.۱ یک گروه آبلی G را آبلی مقدماتی گوییم اگر عدد اول p وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in G$ داشته باشیم $a^p = ۱$.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم π یک مجموعه از اعداد اول و G یک گروه باشد.

(الف) یک عدد صحیح n را یک π—عدد گوییم اگر عوامل اول n متعلق به π باشند.

(ب) یک عنصر از G را یک π—عنصر گوییم اگر مرتبهٔ آن یک π—عدد باشد.

(ج) گروه G را یک π—گروه گوییم اگر مرتبهٔ هر عنصر آن یک π—عدد باشد.

لم ۹.۱.۱ اگر G یک گروه باشد و $H, K \leq G$، آنگاه $[H, K] \lhd \langle H, K\rangle$.

اثبات. ر.ک.[۳۳].

حال لم جالبی را بیان می کنیم که در فصل‌های سوم و چهارم بارها مورد استفاده قرار گرفته است.

لم ۱۰.۱.۱ فرض کنید $H, K \leq G$. دراین‌صورت $(HK)' = H'K'[H, K]$.

اثبات. اگر $[hk, h'k'] \in (HK)'$، آنگاه داریم

$$[hk, h'k'] = [h, h'k']^k [k, h'k'] = [h, k']^k [h, h']^{k'k} [k, k'][k, h']^{k'}$$

چون $[H, K] \lhd \langle H, K\rangle$ داریم $[h, k']^k \in [H, K]$. به‌طور مشابه $[k, h']^{k'} \in [H, K]$. از طرفی $[h, h']^{kk'} = [h, h'][h, h', kk'] \in H'[H, K]$ بنابراین داریم $[hk, h'k'] \in [H, K]H'[H, K]K'[H, K]$ حال چون $[H, K] \lhd \langle H, K\rangle$ و $H' \leq \langle H, K\rangle$، داریم $[H, K]K' = K'[H, K]$ و $[H, K]H' = H'[H, K]$ لذا $[hk, h'k'] \in H'K'[H, K]$ که حکم به آسانی از آن حاصل می‌شود. $\square$

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو کلاس از گروه‌ها باشند. گروه G را $\mathcal{X}$—به‌واسطهٔ—$\mathcal{Y}$ گویند اگر یک زیرگروه نرمال N از G موجود باشد به‌طوری‌که $N \in \mathcal{X}$ و $G/N \in \mathcal{Y}$.
فرض کنید $n > ۲$ و $\mathcal{X}_۱$، ...، $\mathcal{X}_n$ کلاس‌هایی از گروه‌ها باشند. گروه G را $\mathcal{X}_۱$—به‌واسطهٔ—$\mathcal{X}_۲$—به‌واسطهٔ—$\cdots$—به‌واسطهٔ—$\mathcal{X}_n$ گوییم هرگاه زیرگروه نرمال N از G موجود باشد به‌طوری‌که N، $\mathcal{X}_۱$—به‌واسطهٔ—$\mathcal{X}_۲$—به‌واسطهٔ—$\cdots$—به‌واسطهٔ—$\mathcal{X}_{n-۱}$ و G/N متعلق به کلاس $\mathcal{X}_n$ باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱ یک کلاس از گروه‌های متناهی را که تحت زیرگروه، خارج‌قسمت و حاصل‌ضرب مستقیم تعداد متناهی بسته باشد یک واریتهٔ متناهی گوییم. به‌عنوان مثال، کلاس گروه‌های پوچ‌توان و کلاس گروه‌های حل‌پذیر یک واریتهٔ متناهی است. کلاس گروه‌هائی که در قانون $w = x^e = ۱$ صدق کند یک واریته است که آن‌را واریتهٔ برنساید گوئیم و با نماد $\mathcal{B}_e$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. دراین‌صورت

الف — H را کاملاً پایا در G گوییم هرگاه به‌ازای هر درون‌ریختی α از G، $\alpha(H) \leq H$.

ب — H را مشخصه در G گوییم هرگاه به‌ازای هر خودریختی α از G، $\alpha(H) \leq H$.

در اینجا لمی را بیان می‌کنیم که در فصل چهارم نقش اساسی دارد.

لم ۱۴.۱.۱ فرض کنیم G یک ۲—گروه متناهی و H زیرگروه نرمالی از G باشد به‌قسمی‌که $|H'| \leq ۴$. دراین‌صورت $H' \leq Z_۲(G)$.

اثبات. برای اثبات دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت اول. هرگاه $|H'| = ۲$، آنگاه $H' = \langle h \rangle$ و $o(h) = ۲$. به‌ازای‌هر عنصر g از گروه G، $[h,g] = h^{-1}g^{-1}hg = h^{-1}h^g$. چون $H' \trianglelefteq G$، لذا $h^g \in H'$. بنابراین $[h,g] = ۱$ و $H' \leq Z(G)$. پس نتیجه می‌گیریم $H' \leq Z_۲(G)$.

حالت دوم. هرگاه $|H'| = ۴$، آنگاه $H' \cong C_۴$ یا $H' \cong C_۲ \times C_۲$. اگر $H' \cong C_۴$، آنگاه $H' = \langle h \rangle$ و $o(h) = ۴$. می‌دانیم $\langle h^۲ \rangle \trianglelefteq H' \trianglelefteq G$ و $\langle h^۲ \rangle$ زیر گروه مشخصه H' است لذا $\langle h^۲ \rangle \trianglelefteq G$. به‌ازای‌هر عنصر $g \in G$، $[h^۲, g] = h^{-۲}g^{-۱}h^۲g = h^{-۲}(h^۲)^g$. چون $(h^۲)^g = h^۲$ داریم $h^۲ \in Z(G)$. حال به‌ازای‌هر عنصر از گروه G، مانند g داریم $h^g \in H'$ که می‌تواند مقادیر $h, h^۲, h^۳$ را به خود اختصاص دهد، دراین‌صورت $[h,g] = h^{-۱}h = \{e\}$ یا $[h,g] = h^{-۱}h^۲ = h$ یا $[h,g] = h^{-۱}h^۳ = h^۲$. از طرفی می‌دانیم $\{e\}$ و $h^۲$ عناصری از مرکز G هستند لذا دراین دو حالت اثبات روشن است. حال اگر $[h,g] = h$، آنگاه $g^{-۱}hg = h^۲ \in Z(G)$. بنابراین نتیجه می گیریم که $h \in gZ(G)g^{-۱} = Z(G)$. پس h عنصری از مرکز G است و داریم $H' \leq Z_۲(G)$. درحالتی‌که $H' \cong C_۲ \times C_۲$ نیز به‌طور مشابه استدلال می‌کنیم. $\square$

فرض کنید G یک گروه و x یک عضو از آن باشد. x را یک FC–عنصر از G گوییم هرگاه تعداد مزدوج‌های آن در G متناهی باشد، یعنی $|G : C_G(x)|$ متناهی باشد. مجموعهٔ FC–عناصر G تشکیل یک زیرگروه مشخصه می‌دهند که آن را FC–مرکز گروه G گفته و با نماد $FC(G)$ نشان می‌دهیم. اگر $G = FC(G)$، آنگاه G را یک FC–گروه گوییم. به‌آسانی می‌توان دید که کلاس FC–گروه‌ها تحت ساختارهای زیرگروه، تصویر هم‌ریختی و حاصل‌ضرب مستقیم بسته است.

لم ۱۵.۱.۱ (لم دیکمن[۱]) در هر گروه G یک زیرمجموعهٔ متناهی نرمال از اعضای با مرتبهٔ متناهی یک زیرگروه متناهی نرمال تولید می‌کند.

اثبات. ر.ک. [۴۶] صفحهٔ ۴۲۵.

قضیه ۱۶.۱.۱ یک گروه تابدار یک FC–گروه است اگروفقط‌اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی در یک

[۱] Dicman

زیرگروه متناهی نرمال قرار گیرد.

اثبات. ر.ک. [۴۶] صفحهٔ ۴۲۶.

قضیه ۱۷.۱.۱ (نویمن[۲]) اگر G یک FC–گروه باشد، آنگاه G' یک گروه تابدار است. هم‌چنین عناصر تابدار G تشکیل یک زیرگروه کاملاً پایا می‌دهند.

اثبات. ر.ک. [۴۶] صفحهٔ ۴۲۶.

قضیه ۱۸.۱.۱ (بئر[۳]) اگر G یک FC–گروه باشد، آنگاه $G/Z(G)$ یک گروه تابدار باقیمانده‌ای متناهی است.

اثبات. ر.ک. [۴۶] صفحهٔ ۴۲۵.

یک گروه G یک BFC–گروه گفته می‌شود هرگاه عدد صحیح m وجود داشته باشد که برای هر x از G داشته باشیم $|G : C_G(x)| \leq m$. به‌وضوح هر گروه متناهی یک BFC–گروه‌است و هر حاصل‌ضرب مستقیم از یک گروه متناهی با یک گروه آبلی یک BFC–گروه است. BFC–گروه‌ها تشکیل یک کلاس خاصی از FC–گروه‌ها می‌دهد.

قضیه ۱۹.۱.۱ (نویمن) گروه G یک BFC–گروه است اگروفقطاگر G' متناهی باشد.

اثبات. ر.ک. [۴۶] صفحهٔ ۴۲۷.

۲.۱ خاصیت جایگشت‌پذیری در گروه‌ها

فرض کنید n عددی صحیح بزرگ‌تر از یک باشد. در این‌صورت گروهG را n—جایگشت‌پذیر می‌نامیم یا گوییم G متعلق به کلاس P_n است اگر برای هر n—تایی $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ در G، جایگشت غیربدیهی δ متعلق به گروه متقارن S_n وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_{\delta(1)} x_{\delta(2)} \cdots x_{\delta(n)}.$$

---
[۲] B. H. Neumann
[۳] Baer