بسم الله الرحمن الرحیم

الحمد لله رب العالمین الرحمن الرحیم مالک یوم الدین ایاک نعبد و ایاک نستعین اهدنا الصراط المستقیم صراط الذین انعمت علیهم غیر المغضوب علیهم و لا الضالین

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی گرایش جبر

پوشش‌هایی که به وسیله‌ی Ext^1 القاء می‌شوند

استاد راهنما:

دکتر شکرالله سالاریان

پژوهشگر:

سید علی موسوی بقرآباد

مهرماه ۱۳۸۸

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی گرایش جبر آقای سید علی موسوی بقرآباد

تحت عنوان

پوشش‌هایی که به وسیله‌ی Ext^1 القاء می‌شوند

در تاریخ ۱۳۸۸/۷/۲۹ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه خوب به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر شکرالله سالاریان با مرتبه ی علمی دانشیار — امضا

۲- استاد داور داخل گروه دکتر جواد اسداللهی با مرتبه ی علمی دانشیار — امضا

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر محمود بهبودی با مرتبه ی علمی استادیار — امضا

امضای مدیر گروه

سپاسگزاری

شکر و سپاس خداوند بخشنده و مهربان را که آفریننده و روزی دهنده همه مخلوقات عالم است.

اکنون که این پایان نامه به سرانجام رسیده، می دانم که همه لطف عمیم او بوده که در تمام مراحل ، شامل حالم شده است. در اینجا بر خودم واجب می دانم از تمام افرادی که در هدایت من به نحوی سهیم بوده اند تشکر و قدردانی کنم.

ابتدا از پدر ومادر و اعضای خانواده ام که در تمام مراحل زندگی پشتیبان من بوده اند تشکر می کنم. از تمامی اساتید خود مخصوصا آقای دکتر شکرالله سالاریان و دکتر جواد اسداللهی به خاطر زحمات بی منتشان نسبت به این حقیر کمال قدردانی و تشکر را دارم.

از دوستان خودم آقایان حسین اشراقی، اسماعیل حسینی، رسول حافظی، مهدی یزدانی، آزاد خانزادی، ایوب فرامرزی، محسن امینی، محمد تقی نادی، محمد صیادی، مهراب تقوی زاده، ابراهیم برجی، احمد فتاحی، یاسر کیانی، احسان شاکری، بهزاد سلیمان زاده، ... سپاسگزارم و امیدوارم روزهای خوش و شیرین همراه با بهروزی و آیندهای روشن در انتظارشان باشد.

در انتها از کادر اداری گروه ریاضی مخصوصا خانمها فرهمند، گرامی، غازی، معمار سپاسگزارم.

تقدیم به :

پدر مهربانم؛ مرد خستگی ناپذیر

و

مادر عزیزم؛ اسوهٔ صبر و استقامت

چکیده

در این تحقیق R یک حلقه، $\mathcal{B}$ یک کلاس از R- مدول های چپ و $\mathcal{C}$ کلاس از R - مدول های محض در نظر گرفته می شوند. همچنین فرض کنید M یک R- مدول باشد، در این صورت هدف از این تحقیق مطالعه تعمیمی از حدس پوشش یکدست می باشد یا به عبارتی برای هر حلقه R نشان می دهیم:

۱) به ازای هر کلاس از مدول های تزریقی محض$\mathcal{C}$، هر R- مدول راست یک $\ker \mathrm{Ext}(-,\mathcal{C})$– پوشش دارد.
۲) به ازای هر کلاس R - مدول های چپ$\mathcal{B}$، هر R- مدول یک $\ker \mathrm{Tor}(-,\mathcal{B})$– پوشش دارد.

کلید واژه ها: پوشش، پیش – پوشش ، k- تظریف، مدول تزریقی محض.

فهرست مطالب

فرض کنیم R یک حلقه باشد. جفت $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ از کلاس‌های $R-$ مدول‌ها را یک نظریه تاب نامیم، هرگاه نسبت به تابع‌—گون Hom_R دو به دو متعامد باشند یعنی

$$\mathcal{T}=\{T\in R-Mod \mid \mathrm{Hom}_R(T,F)=0, \forall F\in\mathcal{F}\}$$

$$\mathcal{F}=\{F\in R-Mod \mid \mathrm{Hom}_R(T,F)=0, \forall T\in\mathcal{T}\}.$$

و جفت $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ از کلاس‌های $R-$ مدول‌ها را یک نظریه هم‌—تاب نامیم، هرگاه نسبت به تابع‌—گون Ext^1_R دو به دو متعامد باشند یعنی:

$$\mathcal{A}={}^{\perp}\mathcal{B}=\left\{A\in R-Mod \mid \mathrm{Ext}^1_R(A,B)=0, \forall B\in\mathcal{B}\right\}$$

$$\mathcal{B}=\mathcal{A}^{\perp}=\left\{B\in R-Mod \mid \mathrm{Ext}^1_R(A,B)=0, \forall A\in\mathcal{A}\right\}.$$

فرض کنید که $\mathcal{X}$ یک کلاس از مدول‌ها، M یک R— مدول و $X\in\mathcal{X}$ باشد. همریختی $\phi\in\mathrm{Hom}_R(X,M)$ یک $\mathcal{X}-$ پیش‌—پوشش برای M نامیده می‌شود اگر برای هر همریختی $\phi'\in\mathrm{Hom}_R(X',M)$ که $X'\in\mathcal{X}$، همریختی $f:X'\longrightarrow X$ وجود داشته باشد به طوری که $\phi'=\phi\circ f$. فرض کنید $\phi\in\mathrm{Hom}_R(X,M)$ یک $\mathcal{X}-$ پیش‌—پوشش برای M باشد. در این صورت ϕ را یک $\mathcal{X}-$ پوشش برای M نامیم، هرگاه برای هر درون‌—ریختی f روی X که $\phi=\phi\circ f$، f یک خود‌—ریختی روی X باشد.

در سال ۱۹۶۴ لامبک [۱] نشان داد که $R-$ مدول راست $Hom_Z(M,Q/Z)$ تزریقی است اگر و فقط اگر M به عنوان $R-$ مدول چپ، یکدست باشد. در سال ۱۹۸۱ ایناکس [۲] با استفاده از نتایج لامبک حدس معروف پوشش یکدست را مطرح نمود، یعنی

Lambek[1]

Enochs[2]

او پیش بینی کرد که روی حلقه دلخواه R، هر $R-$ مدول دارای پوشش یکدست است.

این پایان نامه در پنج فصل تنظیم شده است. در فصل اول مفاهیم اولیه را به طور گذرا بیان می‌کنیم. درفصل دوم یک قضیه اساسی را اثبات می‌کنیم که در فصل‌های بعدی به طور مستمر از آن استفاده خواهد شد. صورت قضیه به طور خلاصه چنین است:

قضیه: فرض کنید κ و λ کاردینال‌هایی باشند به قسمی که $|R| \leq \kappa$ و $\lambda = \lambda^{\kappa}$. همچنین فرض کنید B، $R-$ مدولی با کاردینالیتی کوچکتر یا مساوی κ باشد، در این صورت $R-$ مدول A با کاردینالیتی λ وجود دارد به قسمی که $Ext(B,A) = \circ$. درفصل سوم نظریه تاب، نظریه هم‌—تاب و زیرمدول‌های محض را بیان کرده و به مطالعه‌ی خواص این دو نظریه می‌پردازیم. سپس با استفاده از نتایج حاصل نشان می‌دهیم هر مدول یک پوشش یکدست دارد. درفصل چهار ابتدا $\kappa-$ تظریف، پوشش و پیش—پوشش را تعریف کرده و سپس به بررسی و مطالعه خواص آن‌ها می‌پردازیم، به ویژه نشان می‌دهیم که هرمدول روی هر حلقه یک $\mathcal{F}-$ پوشش دارد که در آن $\mathcal{F}$ کلاس مدول‌های یکدست است. درفصل پنجم ابتدا تاب آزاد، $\mu-$ آزاد، گروه آبلی تاب آزاد، تزریقی کافی و تصویری کافی را تعریف کرده و سپس مطالبی را به عنوان کاربردهایی از قضیه ۳ از فصل ۲ می آوریم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی را که در طی فصول بعدی این تحقیق مورد نیاز است را بطور گذرا بیان می‌کنیم و از اثبات قضایا صرف نظر می‌کنیم.
برای نوشتن این فصل از منابع [۹ ، ۱۲ و ۱۴] استفاده شده است.

تعریف ۱.۱ . فرض کنید R یک حلقه باشد. یک $R-$ مدول (چپ)، گروهی آبلی و جمعی مانند A همراه با تابعی مانند $R \times A \longrightarrow A$ (نقش (r,a) با ra نشان داده می‌شود) است به طوری که به ازای هر $r, s \in R$ و $a, b \in A$،

(یک) $r(a+b)=ra+rb$،

(دو) $(r+s)a=ra+sa$،

(سه) $r(sa)=(rs)a$.

هرگاه R یکدار باشد و

(چهار) به ازای هر $a \in A$، $a1_R = 1_R a = a$،

دراین صورت گوییم A یک R − مدول یکانی است. به همین نحو، یک R − مدول راست (یکانی) نیز با تابعی چون $A \times R \longrightarrow A$ تعریف می‌شود که به ازای هر $a \in A$ و $r \in R$، با $(a,r) \longmapsto ar$ نشان داده می‌شود که در خواص (یک) تا(چهار) صدق می‌کند. هر R− مدول چپ روی حلقه‌ی جابجایی با تعریف $ar = ra$ یک R− مدول راست نیز خواهد بود و بر عکس.

تعریف ۲.۱ . فرض کنید R یک حلقه و A یک R − مدول (چپ) باشد. زیر مجموعه‌ی ناتهی B یک زیر مدول A است، مشروط بر این که B یک زیر گروه جمعی A باشد وبه ازای هر $b \in B$ و $r \in R$، $rb \in B$.

تعریف ۳.۱ . فرض کنید A و B مدول‌هایی روی حلقه‌ی R باشند. تابع $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی R − مدولی است مشروط بر این که به ازای هر $a, c \in A$ و $r \in R$،

$$f(a+c) = f(a) + f(c) \quad \text{و} \quad f(ra) = rf(a)$$

مجموعه‌ی همه‌ی R− همریختی‌های از A به B را با $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱ . فرض کنید M، R− مدول راست و N، R− مدول چپ باشند. به ازای

هر $\mathbb{Z}$– مدول مثل L، تابع $f : M \times N \to L$ را تابع خطی میانی می‌نامیم هرگاه برای هر $x, x' \in M$، $y, y' \in N$ و $r \in R$،

$$f(x+x', y) = f(x, y) + f(x', y)$$

$$f(x, y+y') = f(x, y) + f(x, y')$$

$$f(xr, y) = f(x, ry)$$

به علاوه، اگر R جابه‌جایی فرض شود و L، R– مدول چپ باشد، تابع خطی میانی $f : M \times N \to L$ را تابع دو–خطی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in M$، $y \in N$ و $r \in R$،

$$f(xr, y) = f(x, ry) = rf(x, y)$$

تعریف ۵.۱ . فرض کنیم A یک R – مدول راست و B یک R – مدول چپ باشد. حاصل ضرب تانسوری A و B عبارت است از یک گروه آبلی که با $A \otimes_R B$ نشان داده می‌شود و یک نگاشت R – دو خطی $h : A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$ به طوری که برای هر گروه آبلی G و هر نگاشت R – دو خطی $f : A \times B \longrightarrow G$ همریختی منحصر به فرد $\bar{f} : A \otimes_R B \longrightarrow G$ موجود باشد به طوری که $\bar{f}h = f$.

قضیه ۶.۱ . برای هر R – مدول راست A و هر R – مدول چپ B، حاصل ضرب تانسوری $A \otimes_R B$ وجود دارد.

اثبات . به قضیه ۴.۱ از [۱۴] رجوع کنید. □

تعریف ۷.۱ . فرض کنید $\{A_i : i \in I\}$ یک خانواده‌ای ناتهی از R – مدول‌ها باشد.

حاصل ضرب این خانواده را که با $\prod_{i\in I} A_i$ نشان می‌دهیم، R — مدولی است که عناصر آن به صورت $(a_i)_{i\in I}$ و اعمالش به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$(a_i)+(b_i)=(a_i+b_i) \qquad , \qquad r(a_i)=(ra_i)$$

تعریف ۸.۱ . همچنین مجموع این خانواده را که با $\coprod_{i\in I} A_i$ نشان می‌دهیم، زیر مدولی از $\prod_{i\in I} A_i$ است که شامل همه $(a_i)_{i\in I}$ است که در آن تعداد متناهی از a_i ها مخالف صفر می‌باشد.

تذکر ۹.۱ . اگر $\{A_i : i\in I\}$، خانواده ای از R — مدول‌هایی روی حلقه‌ی R باشند و مجموعه‌ی اندیس I متناهی باشند، آن گاه $\prod_{i\in I} A_i = \coprod_{i\in I} A_i$.

تعریف ۱۰.۱ . دنباله‌ای از R — مدول ها و R — همریختی‌های

$$\cdots \longrightarrow M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_0 \xrightarrow{\varphi_0} M_{-1} \xrightarrow{\varphi_{-1}} M_{-2} \longrightarrow \cdots$$

را دقیق گوییم هرگاه، برای هر i، $Im\varphi_{i+1}=ker\varphi_i$ باشد.

تعریف ۱۱.۱ . فرض کنید A، B و C، R — مدول و ψ و φ همریختی R — مدولی باشند، در این صورت اگر دنباله‌ی $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ دقیق باشد، آن را یک دنباله‌ی دقیق کوتاه گوییم.

قضیه ۱۲.۱ (لم پنج). فرض کنید

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "t_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "t_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "t_3"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "t_4"'] & A_5 \arrow[d, "t_5"'] \\ B_1 \arrow[r, "h_1"] & B_2 \arrow[r, "h_2"] & B_3 \arrow[r, "h_3"] & B_4 \arrow[r, "h_4"] & B_5 \end{tikzcd}$$

یک نمودار جابجایی از R — مدول‌ها و R — همریختی‌ها باشد، با این ویژگی که هر دو سطر آن دنباله‌ی دقیق باشند.در این صورت

(یک) اگر t_2, t_4 بروریختی و t_5 تکریختی باشند، آنگاه t_3 نیز بروریختی است.

(دو) اگر t_2, t_4 تکریختی و t_1 بروریختی باشند، آنگاه t_3 نیز تکریختی است.

(سه) اگر t_1, t_2, t_4 و t_5 یکریختی باشند، آنگاه t_3 نیز یکریختی است.

اثبات . به قضیه ۳۲.۳ از [۱۴] رجوع کنید. □

تعریف ۱۳.۱ . رسته‌ای مثل $\mathcal{C}$، خانواده‌ای است متشکل از شی‌هایی که معمولا آنها را با A، B، C، D،... نمایش می‌دهیم، با این ویژگی که

۱. به ازای هر دو شی مثل A و B، مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ نشان داده می‌شود و دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شی A، B، C و D که $(A,B)\neq(C,D)$، $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\cap\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)=\emptyset$،

۲. به ازای هر شی مثل A، B، C، تابع

$$.:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

$$(g, f) \longmapsto gf$$

موجود است که

i) به ازای هر چهار شی مثل A، B، C و D، اگر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$، $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ و $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$، آنگاه $h(gf) = (hg)f$،

ii) به ازای هر شی مثل A، عضوی از $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ مثل 1_A موجود است که به ازای هر عضو از $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ مثل f و هر عضو از $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ مثل g، $f 1_A = f$ و $1_A g = g$.

تعریف ۱۴.۱ . فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. تابع—گون هموردا از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، زوجی متشکل از دو تابع است: یکی تابع شی، که به هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، شی $F(A)$ از D را نسبت می‌دهد و دیگری تابع ریختار، که آن را هم با F نشان می‌دهیم و به هر ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \to B$، ریختاری از D مثل $F(f) : F(A) \to F(B)$ نسبت می‌دهد، با این ویژگی که

۱. به ازای هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، $F(1_A) = 1_{F(A)}$،

۲. به ازای هر دو ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \to B$ و $g : B \to C$، $F(gf) = F(g)F(f)$.

تعریف ۱۵.۱ . فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. تابع—گون پادوردا از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، زوجی متشکل از دو تابع است: یکی تابع شی، که به هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، شی $F(A)$ از D را نسبت می‌دهد و دیگری تابع ریختار، که آن را هم با F نشان می‌دهیم و به هر ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \to B$، ریختار $F(f) : F(B) \to F(A)$ را نسبت می‌دهد، با این ویژگی که

۱. به ازای هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، $F(1_A) = 1_{F(A)}$،

۲. به ازای هر دو ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \to B$ و $g : B \to C$، $F(gf) = F(f)F(g)$.

تعریف ۱.۱۶ . تابع—گون همورد F را دقیق چپ نامیم هرگاه برای هر دنباله دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

دنباله

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

دقیق باشد. تابع—گون F را دقیق راست نامیم هرگاه

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

دقیق باشد. حال اگر تابع—گون F پادورد باشد، گوییم F، دقیق چپ است هرگاه

$$0 \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A)$$

دقیق باشد و دقیق راست است هرگاه

$$F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \longrightarrow 0$$

دقیق باشد. اگر تابع—گون F دقیق راست و چپ باشد، گوییم تابع—گون F دقیق است.

قضیه ۱.۱۷ . برای هر R — مدول A، تابع—گون‌های $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ و $\mathrm{Hom}_R(-,A)$ دقیق چپ می‌باشند.

اثبات . به قضیه ۲.۹ از [۱۴] رجوع کنید. □

تعریف ۱۸.۱ . دنباله دقیق کوتاه $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ شکافنده نامیده می‌شود، هر گاه $\mathrm{Im}f$، جمعوند مستقیمی از B باشد.

قضیه ۱۹.۱ . فرض کنید B, A و C، R — مدول باشند. اگر

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

دنباله‌ی دقیق کوتاه باشد، شرایط زیر معادل‌اند:

(یک) دنباله فوق دقیق شکافنده است.

(دو) R — همریختی مانند $f' : B \longrightarrow A$ موجود است که $f'f = 1_A$،

(سه) R — همریختی مانند $g' : C \longrightarrow B$ موجود است که $gg' = 1_C$.

اثبات . به قضیه‌ی ۱۸.۱ از فصل چهارم [۱۲] رجوع کنید. □

قضیه ۲۰.۱ . فرض کنید B و $\{A_i : i \in I\}$، مدول‌هایی روی حلقه‌ی R باشند. در این صورت یکریختی‌های $\mathbb{Z}$ — مدولی زیر وجود دارند،

(یک) $\mathrm{Hom}_R(B, \prod_{i\in I} A_i) \cong \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(B, A_i)$، که در این جا منظور از $\prod_{i\in I} A_i$، حاصل ضرب خانواده‌ی R — مدول‌های A_i است.

(دو) $\mathrm{Hom}_R(\coprod_{i\in I} A_i, B) \cong \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(A_i, B)$، که در این جا منظور از $\coprod_{i\in I}$، حاصل جمع مستقیم خانواده‌ی R — مدول‌های A_i است.

اثبات . به قضایای ۴.۲ و ۶.۲ از [۱۴] رجوع کنید. □

تعریف ۲۱.۱ . فرض کنیم I یک مجموعه جهت دار (یعنی یک مجموعه که یک رابطه دوتایی با خاصیت انعکاسی وتعدی روی آن تعریف شده است) و $\mathcal{C}$ یک رسته

باشد. در این صورت یک سیستم مستقیم در $\mathcal{C}$ با مجموعه اندیس I عبارت است از تابع—گون $F : I \longrightarrow \mathcal{C}$.

یعنی برای هر $i \in I$ شئ F_i و برای هر $i, j \in I$ با شرط $i \leq j$ ریخت (مرفیسم) $\phi^i_j : F_i \longrightarrow F_j$ وجود داشته باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند.

(۱) برای هر $i \in I$، ϕ^i_i همانی باشد.

(۲) اگر $i, j, k \in I$ و $i \leq j \leq k$، آن گاه $\phi^j_k \phi^i_j = \phi^i_k$.

تعریف ۲۲.۱ . فرض کنیم $\{F_i, \phi^i_j\}$ یک سیستم مستقیم در $\mathcal{C}$ باشد. حد مستقیم این سیستم عبارت است از شئ $\varinjlim F_i$ و خانواده‌ای از مرفیسم‌های $\alpha_i : F_i \longrightarrow \varinjlim F_i$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند.

(۱) برای هر $i, j \in I$ با شرط $i \leq j$ داشته باشیم $\alpha_i = \alpha_j \phi^i_j$.

(۲) برای هر شئ X و هر خانواده از مرفیسم‌های $f_i : F_i \longrightarrow X$ با شرط $f_i = f_j \phi^i_j$ (به ازای $i \leq j$) یک مرفیسم منحصر به فرد $\beta : \varinjlim F_i \longrightarrow X$ وجود داشته باشد به طوری که دیاگرام زیر تعویض پذیر باشد.

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim F_i \arrow[rr, "\beta"] & & X \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\phi^i_j"] & \\
& F_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

قضیه ۲۳.۱ . حد مستقیم سیستم مستقیم از مدول‌های $\{F_i, \phi_j^i\}$ وجود دارد و به صورت زیر می‌باشد.

$$\lim_{\rightarrow} F_i = \frac{\coprod F_i}{S}$$

که در آن S زیر مدول تولید شده به وسیله‌ی همه عنصرهای $\lambda_j\phi_j^i a_i - \lambda_i a_i$، جایی که $a_i \in F_i$ و $i \leq j$ باشد.

اثبات . به قضیه ۱۶.۲ از [۱۴] رجوع کنید. □

تعریف ۲۴.۱ . نمودار زیر از همریختی‌های $R-$ مدولی را در نظر بگیرید

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

مدول L به همراه همریختی های $R-$ مدولی $\alpha : C \longrightarrow L$ و $\beta : B \longrightarrow L$ را جلوبر گوییم هرگاه نمودار زیر

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "\alpha"] & L \end{tikzcd}$$

جابه‌جایی باشد و نیز اگر همریختی‌های $R-$ مدولی $\alpha' : C \longrightarrow D$ و $\beta' : B \longrightarrow D$ چنان موجود باشند که نمودار فوق را جابه‌جا کنند آنگاه همریختی یکتای $\theta : L \longrightarrow D$، چنان موجود باشد که نمودار زیر جابجایی باشد.