بسم الله الرحمن الرحيم

پایان نامۀ کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی
(گرایش آنالیز عددی)

عنوان :

حل سیستم مسائل مقدار مرزی با استفاده از اسپلاین غیر چند جمله‌ای

استاد راهنما:

دکتر محمد ضارب‌نیا

تحقیق و نگارش :

مریم هوشیار

دانشگاه محقق اردبیلی

زمستان – ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان‌نامه اسپلاین‌های غیر چند جمله‌ای برای حل عددی سیستم مسائل مقدار مرزی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. حل عددی سیستم مسأله مقدار مرزی مرتبه سوم با استفاده از روش اسپلاین غیر چند جمله‌ای درجه چهارم مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. همچنین اسپلاین غیر چند جمله‌ای درجهٔ پنج را برای حل سیستمی از مسأله مقدار مرزی مرتبهٔ چهارم استفاده کرده‌ایم. مثال‌هایی برای نشان دادن کارایی و دقت روش‌های ارائه شده، آورده شده است.

کلید واژه: حل عددی، اسپلاین‌های غیر چند جمله‌ای، سیستم مسائل مقدار مرزی، همگرایی.

فهرست مندرجات

مقدمه

تاریخچه تعریف تابع اسپلاین

در گذشته مهندسان نقشه‌کشی برای مدتی طولانی از نوارهای باریک و بلندی که از مواد قابل انحنا ساخته می‌شده برای نمایش منحنی‌های همواری که از مجموعه نقاط مفروضی می‌گذشته‌اند، استفاده می کرده‌اند، این نوارها اسپلاین نامیده می‌شده‌اند. با نگاه داشتن اسپلاین در نقاط مختلف مناسب، با استفاده از وزن‌هایی که نشان‌ها نامیده می‌شوند و با تغییر دادن وضعیت اسپلاین، می‌توان یک منحنی هموار از این نقاط گذراند. بنابراین یک اسپلاین به عنوان یک نوار نرم تعریف می‌شود که می‌تواند توسط وزن‌هایی نگاه داشته شود بطوریکه از هر یک از نقاط داده شده بگذرد، اما از یک بازه به بازهٔ دیگر بر طبق قوانین خمیدگی بطور یکنواخت عبور کند. روش ریاضی فعلی برداشتی از این ایده است. در واقع تابع اسپلاین ریاضی یک منحنی به جای نوارهایی است که مهندسان بین هر دو نقطه گره‌ای بکار می‌بردند.

تابع اسپلاین به شکل کنونی ابتدا در سال ۱۹۴۶ در مقاله معروف شوئنبرگ[۱] ارائه شده است. در مقاله شوئنبرگ به این موضوع اشاره شده است که تقریب‌های مورد استفاده در معماری دقیقاً شامل مفهوم‌های تابع اسپلاین ریاضی هستند. در سال ۱۹۴۹ برای نخستین بار یک قضیه برای وجود اسپلاین‌های درون‌یاب توسط شوئنبرگ اثبات شد.

سوکولنیکوف[۲] در سال ۱۹۵۶ یک گسترش خلاصه اما بسیار جالب از نظریه نوارها ارائه کرد. تابع

---

[۱] Shoenberg

[۲] Sokolnikoff

اسپلاین، یک چند جمله‌ای قطعه‌ای است که در یک ناحیه مانند D تعریف می‌شود که در آن D می‌تواند به تعدادی زیر مجموعه تجزیه شود که تابع f در هر کدام از آنها بوسیله یک چند جمله‌ای درجه m تقریب زده می‌شود. تابع فوق همراه با $(m-k)$ مشتق اولیه‌اش در ناحیه ذکر شده پیوسته است.

تاریخچه بکارگیری توابع اسپلاین در حل معادلات دیفرانسیل

معادلات دیفرانسیل نقش بسیار مهمی در علوم مهندسی ایفا می‌کند در حقیقت اکثر پدیده‌های طبیعی با تغییر زمان یا مکان تغییر می‌کنند و مدل کردن این تغییرات منجر به یک معادله دیفرانسیل می‌شود. معادلات دیفرانسیل انواع مختلفی دارند که فقط دسته‌های بسیار خاصی از آنها بطور تحلیلی و دقیق قابل حل هستند و در بسیاری از اوقات یک معادله دیفرانسیل را نمی‌توان با روش تحلیلی حل کرد و یا در صورت قابل حل بودن، محاسبات آن بسیار پیچیده و زمان‌بر است. در این راستا روش‌های عددی که دقت بیشتری داشته باشند و توسط رایانه سریعتر به جواب برسند بیشتر مورد توجه هستند که از جمله می‌توان به حل عددی مسائل موجود در معادلات دیفرانسیل و درونیابی با استفاده از اسپلاین‌ها اشاره کرد.

تعدادی از محققان اسپلاین‌های چند جمله‌ای و پارامتری را برای به دست آوردن جواب عددی معادلات دیفرانسیل بکار برده‌اند از جمله می‌توان به دی‌بور[۳] ، سراج[۴] ، بیکلی[۵] ، فایف[۶] ، لوسکالسو[۷] ، تالبوت[۸] ، السعید[۹]، عزیز[۱۰]، رشیدی‌نیا[۱۱] و غیره اشاره کرد. لوسکالسو و تالبوت برای اولین بار تابع

[۳] De Boor
[۴] Siraj
[۵] Bickley
[۶] Fyfe
[۷] Loscalso
[۸] Talbot
[۹] Al Said
[۱۰] Aziz
[۱۱] Rashid

اسپلاین را برای حل مسائل مقدار اولیه بکار بردند. استفاده از توابع اسپلاین برای مسائل مقادیر مرزی توسط بسیاری از نویسندگان انجام شده است. بیکلی برای نخستین بار از تابع اسپلاین درجه سوم معمولی برای حل مساله مقدار اولیه خطی استفاده کرد، ایده اصلی او استفاده از شرط پیوستگی برای گسسته‌سازی مساله مقدار مرزی بود. روش بیکلی برای حل مساله مقدار اولیه دارای دقت از مرتبه دو می‌باشد در حالیکه دقت خود تابع اسپلاین درجه سوم معمولی دارای از مرتبه چهار است بنابراین به منظوربدست آوردن دقت مرتبه چهار با استفاده از تابع اسپلاین درجه سوم، تابع اسپلاین را به یک پارامتر $k > ۰$ وابسته می‌سازیم. شکل دقیق تابع اسپلاین پارامتری به این بستگی دارد که پارامتر چگونه انتخاب شود، ما تابع اسپلاین پارامتری را بصورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

اسپلاین تحت فشار[۱۲]

اسپلاین کششی[۱۳]

اسپلاین سازگار[۱۴]

اسپلاین غیر چند جمله‌ای[۱۵]

هدف از این پایان‌نامه‌ارائه روش اسپلاین غیر چند جمله‌ای برای بدست آوردن جواب عددی مسائل مقدار مرزی مرتبه سوم و چهارم می‌باشد.

برای این منظور در فصل اول تعاریف، قضایا و مفاهیم اولیه مورد نیاز برای تعیین همگرایی روش‌ها ارائه می‌شود.

در فصل دوم، به کاربرد اسپلاین غیر چند جمله‌ای درجه چهارم برای عددی مسأله مقدار مرزی مرتبه سوم در نقاط گره‌ای می‌پردازیم.

فصل سوم همانند فصل دوم می‌باشد با این تفاوت که تابع اسپلاین غیر چند جمله‌ای بر روی نقاط میانی تعریف می‌شوند.

و نهایتاً در فصل چهارم، مسأله مقدار مرزی مرتبه چهارم را با استفاده از تابع اسپلاین غیر چند جمله‌ای

---

[۱۲] Spline in compression

[۱۳] Spline in tenssion

[۱۴] Adaptive spline

[۱۵] Non-polynomial spline

درجه پنج در نقاط گره‌ای درونیابی می کنیم. در تمام فصل‌ها همگرایی روش‌ها تحلیل شده و خطای برشی و دقت روش‌ها مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند.

مطالب این پایان نامه بر اساس مطالعه روی مراجع [۱]،[۲] و [۳] تنظیم شده است.

فصل ۱

نمادها، تعاریف و نتایج مقدماتی

۱—۱ مقدمه

در این فصل تعاریف، نمادها و قضیه‌هایی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند معرفی می‌شوند.

۱—۲ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱—۲.۱ **ماتریس متقارن:** فرض کنید A ماتریسی مربعی و $n \times n$ باشد. A را یک ماتریس متقارن می‌نامند، هرگاه $A^t = A$، که در آن A^t ترانهاده ماتریس A است.

تعریف ۱—۲.۲ **ماتریس نامنفرد:** ماتریس A را نامنفرد گویند هر گاه A معکوس پذیر باشد. در غیر اینصورت A را منفرد می‌نامیم.

به آسانی نتیجه می‌شودکه A نامنفرد است اگروفقط اگر دستگاه معادلات $AX = 0$ تنها دارای جواب $X = 0$ باشد.

تعریف ۱—۲.۳ **ماتریس نواری:** یک ماتریس $n \times n$ راماتریس نواری گوئیم اگر اعداد صحیح p و q که $1 < p, q < n$ وجود داشته باشند که هر گاه $i + p \leq j$ یا $j + q \leq i$ آن گاه داشته باشیم $a_{ij} = 0$.

که تعداد قطرها برابر $d = p + q - ۱$ می باشد. ماتریس هایی با $d = ۲, ۳$ در بحث درونیابی با توابع اسپلاین بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند.

اگر هر یک از درایه های ماتریس حقیقی $n \times n$، A بزرگتر یا مساوی صفر باشد می‌نویسیم $A \geq ۰$.

تعریف ۱ــ۴.۲ ماتریس یکنوا: ماتریس A را یکنوا نامند هر گاه $AX \geq ۰$ ایجاب کند $X \geq ۰$، که X ماتریسی ستونی است.

اگر A یکنوا بوده و $AX \leq ۰$، چون $-AX = A(-X) \geq ۰$، پس $-X \geq ۰$ یا $X \leq ۰$. پس چنانچه A یکنوا باشد و $AX = ۰$، X باید در هر دو شرط $X \geq ۰$ و $X \leq ۰$ صدق کند. در نتیجه $X = ۰$.

قضیه ۱ــ۱.۲ ماتریس مربعی A یکنوا است اگر و فقط اگر $A^{-۱} \geq ۰$.

اثبات: الف) فرض کنیم $A^{-۱} \geq ۰$ ، یعنی مولفه‌های ماتریس وارون A نامنفی می‌باشند و می‌خواهیم ثابت کنیم A، یکنواست. فرض کنیم $AX \geq ۰$ داریم: $X = IX = (A^{-۱}A)X = A^{-۱}(AX)$ چون $A^{-۱} \geq ۰$ و $AX \geq ۰$ و ضرب ماتریس با عناصر نامنفی، در برداری با عناصر نامنفی، برداری نامنفی است پس $X = A^{-۱}(AX) \geq ۰$ لذا A طبق تعریف ماتریسی یکنواست.
ب) فرض کنیم A یکنواست، می‌خواهیم ثابت کنیم مولفه‌های ماتریس $A^{-۱}$، نامنفی است. فرض کنیم A یکنوا باشد و همچنین $A^{-۱} = [A^{(۱)}, A^{(۲)}, \cdots, A^{(n)}]$ که $A^{(j)}$، j امین ستون از $A^{-۱}$ می باشد از $AA^{-۱} = I$ نتیجه می‌گیریم: $AA^j = e_j \geq ۰, \quad j = ۱, ۲, \cdots, n$ چون A یکنواست و $AA^j \geq ۰$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که $A^j \geq ۰, \quad j = ۱, ۲, \cdots, n$. بنابراین $A^{-۱} \geq ۰$.

قضیه ۱ــ۲.۲ فرض کنیم A و B دو ماتریس یکنوا باشند، آنگاه AB و BA نیز یکنوا می‌باشند.

اثبات: چون A و B یکنوا است پس نتیجه می گیریم:

$$A^{-۱} \geq ۰, \;\; B^{-۱} \geq ۰ \quad \Rightarrow A^{-۱}B^{-۱} = (BA)^{-۱} \geq ۰,$$

بنابراین BA یکنواست. از طرفی داریم:

$$A^{-1} \geq 0, \quad B^{-1} \geq 0 \quad \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} \geq 0,$$

و این یعنی AB یکنواست.

تعریف ۱—۵.۲ ماتریس تحویل پذیر: ماتریس $n \times n$، A را تحویل پذیر گویند هر گاه چنانچه $W = \{1, 2, \cdots, n\}$ باشد، بتوان W را به دو زیر مجموعه غیر تهی S و T چنان افراز کرد که $S \bigcap T = \emptyset$ و $S \cup T = W$ وبرای $i \in S$ و $j \in T$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$. باجایگشت دنباله اعداد مجموعه $\{1, 2, \cdots, n\}$ می‌توان ماتریس A را شبیه به ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

نوشت که A_{11} ماتریس مربعی $r \times r$ و A_{22} ماتریسی $(n-r) \times (n-r)$ می‌باشند. A_{21} ماتریس $(n-r) \times r$ و O ماتریسی با مولفه‌های صفر و از مرتبه $r \times (n-r)$ می‌باشد.

قضیه ۱—۳.۲ ماتریس $A = (a_{ij})$ از مرتبه $n \geq 2$ تحویل ناپذیر است اگر و تنها اگر برای هر دو عدد صحیح i و j که $i, j \in W$، دنباله ای از مولفه های غیر صفر ماتریس A به صورت

$$\{a_{i,i_1}, a_{i_1,i_2}, \cdots, a_{i_{m-2},i_{m-1}}, a_{i_{m-1},j}\}$$

موجود باشد. این دنباله زنجیر نامیده می‌شود و چنانچه $a_{ij} \neq 0$ این زنجیر از یک عنصر a_{ij} تشکیل می‌گردد.

اثبات: الف) فرض کنید برای هر دو عدد صحیح i و j که $i, j \in W$، دنباله‌ای از عناصر غیر صفر A به شکل

$$\{a_{i,i_1}, a_{i_1,i_2}, \cdots, a_{i_{m-2},i_{m-1}}, a_{i_{m-1},j}\}$$

وجود داشته باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم A تحویل ناپذیر است. برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض کنید A تحویل پذیر باشد پس طبق تعریف ماتریس تحویل پذیر مجموعه‌های جدا از هم S و T با ویژگی‌های ذکر شده وجود دارند. چون عناصر زنجیر همگی غیر صفر می‌باشند پس فقط سه حالت برای a_{i_{t-1},i_t} اتفاق می‌افتد.

$$\begin{array}{ll} i) & i_{t-1} \in T, \quad i_t \in T, \\ ii) & i_{t-1} \in T, \quad i_t \in S, \qquad t = 1, \cdots, m \\ iii) & i_{t-1} \in S, \quad i_t \in S, \end{array}$$

همان‌طور که از سه حالت فوق پیداست تغییرات مجموعه اندیس i_0و...وi_m تنها از S به S یا T به T و یا T به S انجام‌پذیر است و این نشان می‌دهد که هیچ زنجیری به ازای $i = i_0 \in S$ و $j = i_n \in T$ وجود ندارد واین با فرض مسأله که وجود زنجیر را به ازای هر دو عضو ازW موجود می‌دانست، تناقض دارد.

ب) حال می‌خواهیم ثابت کنیم اگر A تحویل ناپذیر باشد، آنگاه برای هر دو عدد صحیح i, j که $i, j \in W$، زنجیری از عناصر غیر صفر A به شکل

$$\{a_{i,i_1}, a_{i_1,i_2}, \cdots, a_{i_{m-2},i_{m-1}}, a_{i_{m-1},j}\}$$

وجود دارد.

فرض کنیم $i = i^*$ و$j = j^*$ از اعداد صحیح وجود داشته باشند که هیچ زنجیری برای این دو عدد یافت نشود و فرض کنید S مجموعه‌ی تمام اندیس‌های j باشد که زنجیری برای (i^*, j) یافت شود.

اگر $S = \emptyset$ آنگاه یعنی برای $j = 1, 2, \cdots, n$، $a_{i^*,j} = 0$ وA تحویل پذیر است.

و اگر $S \neq \emptyset$، T را به صورت $W - S$ تعریف می‌کنیم. چون $j^* \in T$ پس $T \neq \emptyset$، $T \cup S = W$، $T \cap S = \emptyset$ و به ازای $i \in S$ و $j \in T$ داریم $a_{ij} = 0$ که این تعریف تحویل پذیر بودن ماتریس A می‌باشد. چون اگر $a_{ij} \neq 0$ برای $i \in S$ و$j \in T$ آنگاه یک زنجیر برای زوج (i^*, i) یافت می‌شود و در نتیجه زنجیری برای (i^*, j) پیدا می‌شود که نشان می‌دهد $j \in S$ و$j \in T$ که با تعریف T تناقض دارد.

یکی از نتایج این قضیه در مورد ماتریس‌های سه قطری به صورت زیر است:

نتیجه ۱ــ۴.۲ ماتریس سه قطری $A=(a_{ij})$ تحویل ناپذیر است اگر و تنها اگر

$a_{i,i-1}\neq 0$,$(i=2,\cdots,n)$ و $a_{i,i+1}\neq 0$,$(i=1,\cdots,n-1)$.

اثبات: الف) فرض کنیم $a_{i,i-1}\neq 0$,$(i=2,\cdots,n)$ و $a_{i,i+1}\neq 0$,$(i=1,\cdots,n-1)$ و فرض کنیم (i,j) اعداد صحیحی باشند که $i<j$، در این صورت زنجیر مناسب، زنجیر $\{a_{i,i+1},a_{i+1,i+2},\cdots,a_{j-1,j}\}$ می‌باشد.

برای $i>j$ نیز بحث به همین صورت می‌باشد و زنجیر مناسب زنجیر $\{a_{i,i-1},a_{i-1,i-2},\cdots,a_{j-1,j}\}$ می‌باشد. برای $i=j$ چنانچه $a_{ii}=0$ زنجیر مناسب، زنجیر $\{a_{i,i+1},a_{i+1,i}\}$ می‌باشد پس طبق قضیه قبل ماتریس سه قطری A با شرط

$a_{i,i-1}\neq 0$,$(i=2,\cdots,n)$ و $a_{i,i+1}\neq 0$,$(i=1,\cdots,n-1)$، تحویل ناپذیر است.

ب) فرض کنیم A تحویل ناپذیر است و می‌خواهیم ثابت کنیم

$a_{i,i-1}\neq 0$,$(i=2,\cdots,n)$ و $a_{i,i+1}\neq 0$,$(i=1,\cdots,n-1)$.

برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم، فرض کنیم برای $m\in W$ و $m>1$، $a_{m,m-1}=0$، S را مجموعه‌ی $\{m,m+1,\cdots,n\}$ و T را مجموعه‌ی $\{1,2,\cdots,m-1\}$ تعریف می‌کنیم. واضح است که به دلیل سه قطری بودن ماتریس A برای $i\in S$ و $j\in T$ داریم $a_{ij}=0$ و این تعریف تحویل پذیر بودن ماتریس A است و تناقض با تحویل ناپذیر بودن ماتریس A دارد.

برای حالت $a_{m,m+1}=0$ و $m\in W$ نیز بحث به همین صورت است.

قضیه ۱ــ۵.۲ فرض کنید ماتریس A تحویل‌ناپذیر باشد و در شرایط زیر صدق نماید:

$$i)\, a_{ij}\leq 0, \qquad i\neq j, \qquad i,j=1,\cdots,n,$$

$$ii)\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \begin{cases} \geq 0, & i=1,2,\cdots,n \\ >0, & \text{برای حداقل یک } i \end{cases}$$

آنگاه ماتریس A یکنواست.

شرط دوم بدین معنی است که مجموع عناصر هر سطر ماتریس A نامنفی و حداقل برای یک سطر مثبت باشد.

۱—۳ نرم برداری و نرم ماتریسی

تعریف ۱—۱.۳ نرم برداری: یک نرم برداری روی فضای برداری حقیقی یا مختلط V تابع‌ای است از V به R به طوری‌که در شرایط زیر صدق کند:

الف) به ازای هر $x \in V$ ، $\| x \| \geq 0$. بعلاوه $\| x \| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$،

ب) به ازای هر $\alpha \in R$ ، و$x \in V$ آنگاه $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$،

ج) به ازای هر $x, y \in V$ آنگاه $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (نامساوی مثلث).

فرض کنیم $V = R^{n \times 1}$. در این صورت به ازای هر $p \geq 1$، $p-$ نرم بردار $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ بصورت $\| x \|_p = (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p)^{1/p}$ تعریف می‌شود که $\| x \|_p$ شرایط تعریف فوق را ارضا می‌کند.

به ازای $p = 2$ نرم فوق را نرم اقلیدسی و به ازای $p = 1$ نرم مجموع قدرمطلق نامند. به ازای $p = \infty$ داریم:

$$\| x \|_\infty = \max | x_i |$$

که این نرم را نرم بینهایت یا نرم ماکزیمم نامند.

$R^{m \times n}$ را فضای برداری شامل همه‌ی ماتریسهای $m \times n$ با درایه های حقیقی در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱—۲.۳ نرم ماتریسی: یک نرم ماتریسی روی $R^{m \times n}$ تابع ای است از $R^{m \times n}$ به R بطوریکه در شرایط زیر صدق کند:

الف) به ازای هر $A \in R^{m \times n}$ ، $\| A \| \geq 0$. بعلاوه $\| A \| = 0$ اگر و فقط اگر $A = 0$،

ب) به ازای هر $\alpha \in R$، و$A \in R^{m \times n}$ آنگاه $\| \alpha A \| = | \alpha | \| A \|$،

ج) به ازای هر $A, B \in R^{m \times n}$ آنگاه $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$ (نامساوی مثلث).

تعریف ۱—۳.۳ : گوییم نرم ماتریس $\| . \|$ روی $R^{m\times n}$ خاصیت ضربی دارد هر گاه به ازای هر $A, B \in R^{m\times n}$، $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$.

و به آسانی می‌توان نتیجه گرفت که نرم بینهایت ماتریس خاصیت ضربی دارد.

قضیه ۱—۱.۳ فرض کنید که F یک ماتریس $n \times n$ و $\| F \| < ۱$. آنگاه ماتریس $I + F$ (I ماتریس واحد) نامنفرد است و

$$\| (I+F)^{-۱} \| \leq \frac{۱}{۱-\|F\|}.$$

اثبات: فرض خلف می‌کنیم که $I + F$ منفرد باشد. در این صورت برداری مثل $x \neq ۰$ موجود است که $(I+F)x = ۰$. در نتیجه

$$x = -Fx \Rightarrow \| x \| = \| -Fx \| \leq \| F \| \| x \| \Rightarrow \| F \| \geq ۱$$

که یک تناقض است. برای اثبات قسمت دوم قرار می‌دهیم $C = (I+F)^{-۱}$. در نتیجه

$$\begin{aligned} ۱ &= \| I \| = \| (I+F)C \| = \| C + FC \| \\ &\geq \| C \| - \| FC \| \\ &\geq \| C \| - \| F \| \| C \| = \| C \| (۱ - \| F \|) \end{aligned}$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\| C \| \leq \frac{۱}{۱-\|F\|}.$$

۱—۴ اسپلاین

تعریف ۱—۴.۱ تابع اسپلاین : فرض می‌کنیم $\triangle = \{a = x_0 < x_1 < \cdots, x_n = b\}$ یک افراز برای بازه $I = [a, b]$ باشد اسپلاین $S_\triangle$ از درجه ℓ، تابعی است حقیقی روی بازه‌ی I که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) در هر زیر بازه‌ی $i = 0, 1, \cdots, n-1$ ، $I_i = [x_i, x_i + 1]$ ، $S_\triangle$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه حداکثر ℓ باشد،

ب) $S_\triangle$ روی I، دارای مشتقات پیوسته تا مرتبه‌ی $\ell - 1$ باشد.

تعریف ۱—۴.۲ تابع اسپلاین غیر چند جمله‌ای: تابع اسپلاین غیر چند جمله‌ای بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_i(x) = a_i \sin k(x - x_i) + b_i \cos k(x - x_i) + \sum_{t=0}^{n-2} c_{t_i}(x - x_i)^t$$

که $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

پایه‌های این نوع تابع اسپلاین در حالت کلی بصورت زیر است:

$$T_n = Span\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^{n-2}, \cos kx, \sin kx\}$$

که در آن a_i، b_i و c_{t_i} مقادیر حقیقی هستند وهمچنین

$$\lim_{k\to 0} \frac{2}{k^2}(\cos(kx - 1)) = x^2$$
$$\lim_{k\to 0} \frac{6}{k^3}(\sin(kx) - (kx)) = x^3$$
$$\lim_{k\to 0} \frac{24}{k^4}(\cos(kx) - 1 + \frac{(kx)^2}{2}) = x^4$$
$$\lim_{k\to 0} \frac{120}{k^5}(\sin(kx) - kx - \frac{(kx)^3}{6}) = x^5$$

و به همین ترتیب می‌توان این روند را ادامه داد. از معادلات بالا می‌توان نتیجه گرفت که پایه‌های اسپلاین غیر چندجمله‌ای به اسپلاین معمولی تبدیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$\lim_{k\to 0} T_n = \{1, x, x^2, \cdots, x^{n-2}, x^{n-1}, x^n\}$$

لازم به ذکر است که تابع اسپلاین غیرچندجمله‌ای از هر مرتبه پیوسته و مشتق پذیر است.

فصل ۲

حل عددی سیستم مسائل مقدار مرزی مرتبه سوم به وسیله اسپلاین غیر چندجمله‌ای

۲—۱ مقدمه

در این فصل یک سیستم از مسأله مقدار مرزی مرتبه سوم بصورت زیر

$$y^{(3)} = \begin{cases} f(x), & a \le x \le c, \\ g(x)y(x) + f(x) + r, & c \le x \le d, \\ f(x), & d \le x \le b, \end{cases} \qquad (1-2)$$

باشرایط مرزی

$$y(a) = \alpha_1, \qquad y'(a) = \beta_1, \qquad y'(b) = \beta_2, \qquad (2-2)$$

را در نظر می‌گیریم که α_1، β_1، β_2 و r ثابت‌های دلخواه حقیقی و متناهی هستند و y، y' و y'' در نقاط c و d و تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب روی بازه $[a, b]$ و $[c, d]$ پیوسته می‌باشند. در حالت کلی برای هر تابع دلخواه $f(x)$ و $g(x)$ نمی‌توان جواب تحلیلی پیدا کرد و باید با استفاده از روش‌های عددی یک تقریب از جواب را بدست آورد.

در این فصل، تابع اسپلاین غیر چند جمله‌ای درجه چهار را جهت ایجاد یک روش عددی برای بدست آوردن تقریب جواب مسأله (۲—۱) با شرایط مرزی (۲—۲) بکار خواهیم برد.

۲—۲ روش عددی

به منظور بدست آوردن یک روش عددی برای تقریب جواب مسأله (۲—۱) با شرایط مرزی (۲—۲) ابتدا فرض می‌کنیم $c = \frac{3a+b}{4}$ و $d = \frac{a+3b}{4}$ باشند.

افراز $\triangle$ را روی بازه $[a,b]$ بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\triangle = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b\},$$

که

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2 \cdots, n+1, \quad h = \frac{b-a}{n+1} \qquad (3-2)$$

تابع اسپلاین غیرچندجمله‌ای را در هر زیر بازه $[x_i, x_{i+1}]$ به‌ازای $i = 0, 1, \cdots, n$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_i(x) = a_i \cos k(x - x_i) + b_i \sin k(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$
$$+ d_i(x - x_i) + e_i, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n. \qquad (4-2)$$

که در فرمول فوق، ضرایب a_i، b_i، c_i، d_i و e_i مقادیر حقیقی هستند و k، یک پارامتر آزاد می‌باشد. اگر $k \to 0$، آنگاه تابع اسپلاین غیر چند جمله‌ای درجهٔ چهار $P_i(x)$ به اسپلاین درجهٔ چهار معمولی تبدیل می‌شود.

فرض کنید $y(x)$ جواب تحلیلی مسأله و s_i تقریبی از $y(x_i)$ باشد که از اسپلاین غیر چند جمله ای درجه چهار بدست آمده است.

برای راحتی، مقدار چندجمله ای $P_i(x)$ در نقاط گره ای و همچنین مشتق مرتبه اول و سوم آن را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P_i(x_i) = s_i, \qquad p_i(x_{i+1}) = s_{i+1}, \qquad P_i'(x_i) = D_i,$$

$$P_i'(x_{i+1}) = D_{i+1}, \qquad P'''(x_i) = T_i, \qquad p'''(x_{i+1}) = T_{i+1}, \qquad (5-2)$$