دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان :

محک مجاورت رئوس گراف اول گروههای ساده متناهی ناآبلی

نگارنده:

نعیمه حسنی

استاد راهنما:

دکتر بهروز خسروی

استاد مشاور:

دکتر فرهاد رحمتی

مهر ۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

بسمه تعالی

فرم اطلاعات پایان‌نامه

کارشناسی- ارشد و دکترا

تاریخ:
شماره:

معاونت پژوهشی
فرم پروژه تحصیلات تکمیلی ۷

مشخصات دانشجو:

نام و نام خانوادگی: نعیمه حسنی　　دانشجوی آزاد ○　　بورسیه ○　　معادل ○

شماره دانشجوئی: ۸۵۱۱۳۰۱۷　　دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر　　رشته تحصیلی:ریاضی محض(گرایش جبر)　　گروه:

نام و نام خانوادگی: دکتر بهروز خسروی　　درجه و رتبه: استادیار

نام و نام خانوادگی:　　درجه و رتبه:

مشخصات استاد مشاور:

نام و نام خانوادگی: دکتر فرهاد رحمتی　　درجه و رتبه: دانشیار

نام و نام خانوادگی:　　درجه و رتبه:

عنوان پایان‌نامه به فارسی : محک مجاورت گراف اول گروههای ساده متناهی نا آبلی

عنوان پایان‌نامه به انگلیسی: **an adjacency criterion for the prime graph of a finite simple group**

نوع پروژه: کارشناسی ○　　ارشـد * ○　　دکتـرا ○　　سال تحصیلی: 87

کاربردی ○　　بنیادی ○　　توسعه‌ای ○　　نظـری * ○

تاریخ شروع : مهر۸۶　　تاریخ خاتمه :مهر ۸۷　　تعداد واحد :۶　　سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه‌های کلیدی به فـارسـی: گروه ساده متناهی، گروههای از نوع لی، گراف اول یک گروه متناهی، عدد استقلال وعدد۲- استقلال یک گراف اول

واژه‌های کلیدی به انگلیسی: **finite group, finite simple group, group of Lie type, prime graph of a group, independence number of a prime graph, 2-independence number of a prime graph .**

مشخصات ظاهری	تعداد صفحات ۹۰	تصویر　جدول *　نمودار　نقشه　واژه‌نامه		تعداد مراجع ۱۴	تعداد صفحات ضمائم
زبان متن	فارسی * ○	○ انگلیسی ○	چکیده ○	فارسی *	ا نگلیسی *
یادداشت	○	○		○	○

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیت‌های پژوهشی دانشگاه

استاد:

دانشجو:

امضاء استاد راهنما:　　**تاریخ:**

چکیده

فرض کنید G گروهی متناهی ، $\pi(G)$ مجموعه تمام اعداد اول شمارنده $|G|$ و $\omega(G)$ مجموعه مرتبه عناصر گروه G باشد.

گراف اول گروه G به صورت زیر تعریف می شود: مجموعه راسهای این گراف مجموعه $\pi(G)$ و دو راس متمایز p و q را توسط یک یال به هم وصل می‌کنیم، اگر و تنها اگر G شامل عنصری از مرتبه pq باشد. این گراف اولین بار توسط کگل و گرونبرک معرفی شد، به همین دلیل آن را با $GK(G)$ نمایش می دهند و به آن گراف گرونبرک−کگل گروه G نیز گفته می شود.

$s(G)$ را تعداد مولفه های همبندی گراف اول G و $\pi_i(G)$ را به ازای $i = ۱, ۲, ..., s(G)$، i امین مولفه همبندی گراف $GK(G)$ می‌نامیم.

مرجع اصلی ما در این پایان نامه مقاله زیر است:

A. V. Vasiliev and E. P. Vdovin, An adjacency criterion for the prime graph of a finite simple group, Algebra and Logic, ۴۴(۶) (۲۰۰۵) ۳۸۱−۴۰۵.

با توجه به اهمیت گراف اول، ابتدا به بیان محک مجاورت برای رئوس گراف اول هر گروه ساده متناهی ناآبلی پرداخته‌ایم. از این محک برای مشخص کردن $\rho(G)$، مجموعه‌ای مستقل با بیشترین تعداد رئوس از گراف اول G وهمینطور $\rho(۲, G)$، مجموعه‌ای مستقل با بیشترین تعداد رئوس از گراف اول G که شامل راس ۲ است، استفاده می شود.

سپس به بررسی برخی ارتباطات بین ساختار یک گروه وگراف اول آن می پردازیم و اهمیت عدد استقلال گراف اول گروه G را درشناخت ساختار G بیان می کنیم .

گروه متناهی G شناسایی پذیر بوسیله گراف اول نامیده می‌شود هرگاه تساوی $GK(H) = GK(G)$ نتیجه دهد که $H \cong G$. یک گروه ساده و غیر آبلی G را شبه شناسایی پذیر بوسیله گراف اول نامیم

هرگاه هر گروه متناهی H با شرط $GK(H) = GK(G)$، یک عامل ترکیبی غیر آبلی یکتا، یکریخت با G داشته باشد.

نهایتا، نشان می‌دهیم که گروه $^{۲}D_p(۳)$ که $p = ۲^n + ۱ \geq ۵$ عددی اول است، گروهی شبه شناسایی پذیر بوسیله گراف اول است، به بیان دیگر اگر G یک گروه متناهی باشد به طوری که $GK(G) = GK(^{۲}D_p(۳))$، که $p = ۲^n + ۱ \geq ۵$، آنگاه G یک عامل ترکیبی غیر آبلی یکتا یکریخت با $^{۲}D_p(۳)$ دارد. همچنین نشان می‌دهیم که اگر $|G| = |^{۲}D_p(۳)|$ و $GK(G) = GK(^{۲}D_p(۳))$ آنگاه $G \cong {}^{۲}D_p(۳)$.

لازم به ذکر است مطالب فصل ٦ را با کمک دکتر بهروز خسروی واعظم بابایی به شکل مقاله‌ای تدوین و جهت داوری به یکی از مجلات ارسال داشته‌ایم.

فهرست مندرجات

فصل ۰

مقدمه ۰

مطالعه ساختارهای جبری با استفاده از خواص گرافها موضوع تحقیقات بسیاری در سالهای اخیر بوده است و به نتایج جالبی منجر شده است. به طور کلی رابطه نزدیکی میان نظریه گروه و نظریه گراف وجود دارد.

به روشهای مختلفی گرافهایی رابه گروه نسبت می‌دهند و خواص جبری گروه را با استفاده از گراف نسبت داده شده بررسی می‌کنند. گرافی را که ما در این پایان نامه مورد بررسی قرار می‌دهیم، گراف اول یک گروه است. این گراف برای اولین بار توسط کگل و گرونبرک معرفی شد و بدین صورت ساخته‌می‌شود.

فرض کنید G گروهی متناهی باشد، مجموعه رئوس گراف اول G که با $GK(G)$ نمایش داده می‌شود، تمام شمارنده‌های اول $|G|$ می‌باشد و دو راس p و q با یک یال به‌هم متصل می‌شوند اگر وتنها اگر G شامل عضوی از مرتبه pq باشد.

خاصیتهای گراف اول یک گروه اطلاعات مفیدی راجع به ساختار آن گروه به ما می‌دهد.

کگل و گرونبرگ در قضیه معروف خود ساختار گروههایی با گراف اول غیر همبند را مشخص کردند. بر مبنای این بحث تشخیص پذیریهایی مطرح شدند که از آن جمله می توان به گروههای $PSL(2,q)$ جایی که $4 \mid q+1$ و $E_7(2)$ اشاره کرد.

هدف اصلی این پایان نامه، مشخص کردن محک مجاورت برای رئوس گراف اول هر گروه ساده متناهی ناآبلی است.

در فصلهای ۱ تا ۳ به بیان این مهم پرداخته‌ایم. در فصل ۴، عدد استقلال، عدد ۲ـاستقلال و عدد p–استقلال را برای گراف اول همه گروههای ساده ناآبلی بیان می‌کنیم و در فصل ۵ به بررسی برخی ارتباطات بین گراف اول یک گروه و ساختار جبری آن گروه می‌پردازیم.

نهایتاً در فصل ٦ با همراهی دکتر بهروز خسروی واعظم بابایی بعنوان یک مقاله جدید، نشان می‌دهیم گروه $D_p(3)$ [2] که $p = 2^n + 1 \geq 5$ عددی اول است، گروهی شبه شناسایی پذیر بوسیله گراف اول است.

فصل ۱

مفا هیم و تعاریف مقدماتی

۱−۱ گراف اول

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید G گروهی متناهی باشد، مجموعه همه شمارنده‌های اول $|G|$ را با $\pi(G)$ و مجموعه همه مرتبه‌های عناصر G را با $\omega(G)$ نمایش می‌دهیم.
به عبارت دیگر:

$$n \in \omega(G) \ \Leftrightarrow \ \exists g \in G \ , \ o(g) = n$$

تعریف ۲.۱.۱ عناصر ماکسیمال $\omega(G)$ تحت رابطه بخش پذیری را با مجموعه $\mu(G)$ نمایش می دهیم .

تعریف ۳.۱.۱ گراف اول گروه G (گراف گرونبرگ−کگل) که آن را با $GK(G)$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
مجموعه رئوس این گراف، همان مجموعه $\pi(G)$ است و اگر $r, s \in \pi(G)$، آنگاه r, s مجاورند (s, r توسط یالی در گراف به‌هم متصل شده‌اند) اگر وتنها اگر G عنصری از مرتبه rs داشته باشد.
$s(G)$ را تعداد مولفه‌های همبندی گراف اول G و $\pi_i(G)$ را به ازای $i = ۱, ۲, ..., s(G)$، i امین مولفه

همبندی گراف $GK(G)$ می‌نامیم.

قرارداد ۱.۱.۱ اگر G گروهی از مرتبه زوج باشد آنگاه $۲ \in \pi_۱(G)$.

تعریف ۴.۱.۱ مجموعه $A \subseteq \pi(G)$ را مستقل گوییم هرگاه به ازای هر $r, s \in A$، راسهای r, s غیر مجاور باشند.

تعریف ۵.۱.۱ یکی از مجموعه‌های مستقل از رئوس گراف اول G را که دارای بیشترین تعداد رئوس گراف می‌باشد، با $\rho(G)$ نشان می‌دهیم و $t(G) = |\rho(G)|$ را عدد استقلال گراف اول G می‌نامیم.

تعریف ٦.۱.۱ یکی از مجموعه‌های مستقل از رئوس گراف اول G را که شامل راس p بوده ودارای بیشترین تعداد رئوس نیز می‌باشد، با $\rho(p, G)$ نشان می‌دهیم و $t(p, G) = |\rho(p, G)|$ را عدد p—استقلال گراف اول G می‌نامیم.

مثال ۱.۱.۱ عدد استقلال و عدد ۲—استقلال گراف اول گروه $A_۷$ به‌صورت زیر است:

$$\rho(G) = \{۲, ۵, ۷\} \text{ یا } \rho(G) = \{۳, ۵, ۷\} \text{ و } t(G) = ۳$$

$$\rho(۲, G) = \{۲, ۵, ۷\} \text{ و } t(۲, G) = ۳$$

۱—۲ رده بندی گروههای ساده متناهی

قضیه رده بندی گروههای ساده متناهی

(۱) گروههای ساده‌آبلی که دقیقاً عبارتند از $c_۱$ و c_p که در آن p یک عدد اول است;

(۲) گروههای متناوب A_n برای $n \geq ۵$;

(۳) خانواده‌ای متنوع ازگروهها مشهور به گروههای ساده از نوع لی ;

(۴) گروههای پراکنده که یک مجموعه ۲۶ عضوی از گروههای ساده است.

گروههای ساده متناهی از نوع لی خود به سه دسته تقسیم می‌شوند:

(i) گروههای شوالی

گروههای ساده از نوع لی هستند که شامل ۴ خانواده نامتناهی از گروههای ساده می‌باشند:

(۱) $PSL(n,q)$ (گروه خطی خاص تصویری)؛

(۲) $PSU(n,q)$ (گروه خطی یکانی خاص تصویری)؛

(۳) $C_n(q)$ (گروه سیمپلیتیک تصویری)؛

(۴) $B_n(q)$ و $D_n(q)$ و $^2D_n(q)$.

به این گروهها، گروههای کلاسیک از نوع لی نیز گفته می‌شود.

(ii) گروههای شوالی تابدار

این گروهها عبارتند از :

$G_2(q)$ برای $q > 2$; $F_4(q)$; $E_6(q)$; $^2E_6(q)$; $E_7(q)$; $E_8(q)$; $^3D_4(q)$; $^2B_2(2^{2n+1})$ برای $n \geq 1$; $^2G_2(3^{2n+1})$ برای $n \geq 1$ و $^2F_4(2^{2n+1})$ برای $n \geq 1$.

به این گروهها، گروههای استثنایی از نوع لی نیز گفته می‌شود.

(iii) گروه تایت

گروهی ساده ومتناهی است که زیر گروهی از $^2F_4(2)$ می‌باشد: $^2F_4'(2)$.

۱ـ۳ تعاریف و لمهای مقدماتی

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید q عددی طبیعی و r عددی اول وفرد باشد، به‌طوری‌که $(r,q)=۱$، $e(r,q)$ را کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند n تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که $q^n \equiv ۱ \pmod r$. به $e(r,q)$ ، $ord_r(q)$ نیز گفته می شود.

قرارداد ۱.۳.۱ اگر q عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه $e(۲,q)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e(۲,q)=\begin{cases} ۱ & q\equiv ۱ \pmod ۴ \\ ۲ & q\equiv -۱ \pmod ۴ \end{cases}$$

مثال ۱.۳.۱ $e(۵,۳)=۴ \quad , \quad e(۲,۷)=۲ \quad , \quad e(۷,۲)=۳$

تعریف ۲.۳.۱ اگر q عددی طبیعی و r عددی اول و $e(r,q)=n$، آن‌گاه r را یک مقسوم‌علیه اول اولیه از $q^n-۱$ می‌نامیم و آن را با r_n نمایش می‌دهیم.

تذکر۱.۳.۱ $r_{۲m}$ مقسوم‌علیه اول اولیه از $q^{۲m}-۱$، عدد $q^m+۱$ را عاد می‌کند و شمارنده $q^k+۱$ برای هر $k<m$ نخواهد بود.

تذکر ۲.۳.۱ اگرn و q را ثابت فرض کنیم، آنگاه $q^n-۱$ ممکن است بیش ازیک مقسوم‌علیه اول اولیه داشته باشد.

مثال ۲.۳.۱ مقسوم‌علیه اول اولیه $۱۳^۱-۱$، $r_۱=۲$ ، $r_۱=۳$ هستند.

تعریف ۳.۳.۱ فرض کنید n عددی طبیعی و r عددی اول و $n=r^k.L$ جایی‌که $(r,L)=۱$، در این صورت بخش r عدد n را با n_r نمایش داده و تعریف می‌کنیم $n_r=r^k$.

مثال ۳.۳.۱ $۸_۲=۲^۳ \quad , \quad ۵_۳=۳^۰=۱ \quad , \quad ۱۲_۲=۲^۲$

لم ۱.۳.۱ اگر q عددی طبیعی بزرگ‌تر از یک باشد، آن‌گاه برای هر $n\in N$، عدد اولی مانند r

موجود است به‌طوری‌که $e(r,q)=n$، به‌جز حالتی که $n=6$ و $q=2$.

اثبات : [۱۳] را ببینید. □

تذکر ۳.۳.۱ با توجه به[۱، گزاره‌های ۴.۹.۱۰ و ۱۴.۳.۱] مرتبه هر گروه ساده متناهی از نوع لی مثل G، روی میدان از مرتبه q با مشخصه p $(q=p^{n\prime})$ برابر است با :

$$|G|=\frac{1}{d}q^{N}(q^{m_1}\pm 1)...(q^{m_n}\pm 1)$$

بنابراین به ازای هر $r\in\pi(G)\setminus\{p\}$، m ای طبیعی موجود است به‌طوری‌که r مقسوم‌علیه اول اولیه‌از $q^{m}-1$ است.

تعریف ۴.۳.۱ فرض کنید G گروهی متناهی از نوع لی باشد یک توروس از G زیر گروهی آبلی، همبند وفشرده از G است (مفهوم همبندی و فشردگی توروس بعنوان زیر منیفلدی ازگروه G تعریف می‌شود).

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنیدG گروهی ساده متناهی از نوع لی روی میدان از مرتبهq با مشخصه p باشد عنصر $g\in G$ را نیمه‌ساده گوییم هرگاه $(o(g),p)=1$. در این صورت ماکسیمال توروسی از G مثل T موجود است به طوری که $g\in T$.

در دو لم بعدی، مرتبه ماکسیمال توروسهای گروههای ساده متناهی ناآبلی از نوع لی، آورده شده است.

لم ۲.۳.۱ [۲و۳]

(۱) مرتبه‌هر ماکسیمال توروس از گروه ساده‌و متناهی$G=A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$ مثل T به صورت زیر است: $|T|=\dfrac{1}{(n,q-\varepsilon 1)(q-\varepsilon 1)}(q^{n_1}-(\varepsilon 1)^{n_1}).(q^{n_2}-(\varepsilon 1)^{n_2})...(q^{n_x}-(\varepsilon 1)^{n_x}$ برای افراز $n_1+n_2+...n_x\ =\ n$.

بعلاوه برای هر افرازی از n، ماکسیمال توروسی از G، مطابق با آن افراز موجود است.

(۲) مرتبه‌هر ماکسیمال توروس از گروههای ساده و متناهی $G=B_n(q)$ یا $G=C_n(q)$ به صورت زیر

است: $$|T| = \frac{1}{(2, q-1)}(q^{n_1}-1).(q^{n_2}-1)...(q^{n_x}-1).(q^{t_1}+1)...(q^{t_m}+1)$$

برای افراز $n = n_1+...+n_x+t_1+...+t_m$. بعلاوه برای هر افرازی از n، ماکسیمال توروسی از G، مطابق با آن افراز موجود است.

(۳) مرتبه‌هر ماکسیمال توروس از گروه ساده و متناهی $G = D_n{}^{\varepsilon}(q)$ به صورت زیر است:

$$|T| = \frac{1}{(4, q^n - \varepsilon 1)}(q^{n_1}-1)...(q^{n_x}-1).(q^{t_1}+1)...(q^{t_m}+1)$$

برای افراز $n = n_1+...+n_x+t_1+...+t_m$. جاییکه m برای $\varepsilon = +$ زوج وبرای $\varepsilon = -$ فرد است. بعلاوه برای هر افرازی از n، ماکسیمال توروسی از G مطابق با آن افراز موجود است. □

تذکر ۴.۳.۱

$$D_n{}^{-}(q) = {}^2D_n(q)\ ,\ D_n{}^{+}(q) = D_n(q)\ ,\ A_{n-1}^{-}(q) = {}^2A_{n-1}(q)\ , A_{n-1}^{+}(q) = A_{n-1}(q)$$

لم ۳.۳.۱ [۲و۶]

(۱) فرض کنید $G = G_2(q)$ گروهی ساده و متناهی باشد.در این‌صورت مرتبه‌هر ماکسیمال توروس از G به صورت زیر است:

$(q\pm 1)^2\ ;\ q^2-1\ ;\ q^2 \pm q + 1$. بعلاوه برای هرکدام از اعداد مذکور، ماکسیمال توروسی از G از مرتبه آن عدد موجود است.

(۲) فرض کنید $G = F_4(q)$ گروهی ساده متناهی از نوع لی باشد، در این‌صورت مرتبه‌هر ماکسیمال توروس از G به صورت زیر است:

$(q\pm 1)^4\ ;\ (q^2\pm 1)(q\pm 1)^2\ ;\ (q^2\pm 1)^2\ ;\ (q\pm 1)(q^3\pm 1)\ ;\ q^4-q^2+1\ ;\ (q^2\pm q+1)^2\ ;\ q^4\pm 1$

بعلاوه برای هرکدام از اعداد مذکور، ماکسیمال توروسی از G از مرتبه آن عدد موجود است.

(۳) فرض کنید $G = E_6^{\varepsilon}(q)$ گروهی ساده متناهی از نوع لی باشد،و T ماکسیمال توروسی از G، دراین

صورت $|T|(3, q-1)$ برابر با یکی از اعداد زیر است:

$$6 \geq k \geq 2\ ,\ (q-\varepsilon 1)^{k}(q+\varepsilon 1)^{6-k}\ ;\ 5 \geq k \geq 1\ ,\ (q^{k}-(\varepsilon 1)^{k})(q^{6-k}-(\varepsilon 1)^{6-k})\ ;$$

$$6 \geq k \geq 3\ ,\ (q^{k}-(\varepsilon 1)^{k})(q-\varepsilon 1)^{6-k}\ ;\ (q^{3}-\varepsilon 1)(q^{2}-1)(q\pm 1)\ ;$$

$$(q^{5}-\varepsilon 1)(q+\varepsilon 1)\ ;\ (q^{3}+\varepsilon 1)(q^{2}\pm 1)(q-\varepsilon 1)\ ;\ (q^{4}+1)(q^{2}-1)\ ;\ (q^{2}+1)^{2}(q-\varepsilon 1)^{2}\ ;$$

$$(q^{2}+\varepsilon q+1)^{3}\ ;\ (q-\varepsilon 1)^{2}(q^{2}+1)^{2}\ ;\ (q^{4}-1)(q+\varepsilon 1)^{2}\ ;$$

$$(q^{3}+\varepsilon 1)(q^{2}+\varepsilon q+1)(q+\varepsilon 1)\ ;\ (q^{4}-q^{2}+1)(q^{2}+\varepsilon q+1)\ ;$$

$$1+\varepsilon q^{3}+q^{6}\ ;\ (q^{2}+\varepsilon q+1)(q^{2}-\varepsilon q+1)^{2}.$$

جایی که $\varepsilon = \pm$. بعلاوه برای هر عدد طبیعی n مذکور در بالا، ماکسیمال توروسی از G، مثل T موجود است به‌طوری‌که $n = |T|(3, q-\varepsilon 1)$.

(۴) فرض کنید $G = E_{8}(q)$ گروهی ساده متناهی از نوع لی باشد، در این‌صورت مرتبه‌هر ماکسیمال توروس از G به صورت زیر است:

$$|T| \neq q^{8}+1;\ \ n_{1}+n_{2}+\ldots+n_{x}=8\ ,\ (q^{n_{1}}\pm 1)(q^{n_{2}}\pm 1)\ldots(q^{n_{x}}\pm 1)$$

$$;\ (q-\varepsilon 1)(q^{2}+\varepsilon q+1)^{3}(q\pm 1)\ ;\ (q^{5}-\varepsilon 1)(q^{2}+\varepsilon q+1)(q\pm 1)$$

$$(q^{3}\pm 1)(q^{4}-q^{2}+1)(q\pm 1);\ (q-\varepsilon 1)(q^{6}+\varepsilon q^{3}+1)(q\pm 1)$$

$$(q^{3}-\varepsilon 1)(q^{2}-\varepsilon q+1)^{2}(q\pm 1);\ q^{8}-q^{4}+1\ ;\ q^{8}+q^{7}-q^{5}-q^{4}-q^{3}+q+1$$

$$(q^{2}\pm q+1)^{4};\ (q^{2}-q+1)(q^{2}+q+1)^{2}\ ;\ (q^{4}-q^{2}+1)(q^{2}\pm q+1)^{2}\ \ (q^{4}+\varepsilon q^{3}+q^{2}+\varepsilon q+1)^{2}$$

و $q^{8}-q^{6}+q^{4}-q^{2}+1$

جایی‌که $\varepsilon = \pm$. بعلاوه برای هرکدام از اعداد مذکور، ماکسیمال توروسی از G از مرتبه آن عدد موجود است.

(۵) فرض کنید $G = {}^{3}D_{4}(q)$ گروهی ساده متناهی از نوع لی باشد، در این‌صورت مرتبه هر ماکسیمال توروس از G به صورت زیر است:

$$(q^3 \pm 1)(q^2 \pm 1)\ ;\ (q \pm q + 1)^2\ ;\ q^4 - q^2 + 1$$

بعلاوه برای هر عدد طبیعی مذکور، ماکسیمال توروسی از G، از مرتبه آن عدد موجود است.

(٦) فرض کنید $G = E_7(q)$ گروهی ساده متناهی از نوع لی باشد و T ماکسیمال توروسی از G ، دراین صورت عدد $(2, q-1)|T|$ برابر با یکی از اعداد زیر است:

$$(q^{n_1} \pm 1)...(q^{n_x} \pm 1)\ ,\ n_1 + n_2 + ... + n_x = 7\ ,\ (2, q-1)|T| \neq (q \pm 1)(q^6 + 1);$$

$$(q - \varepsilon 1)(q^6 + \varepsilon q^3 + 1)\ ;\ (q^3 - \varepsilon 1)(q^2 - \varepsilon q + 1)^2;$$

$$(q - \varepsilon 1)(q^2 + \varepsilon q + 1)^3\ ;\ (q^5 - \varepsilon 1)(q^2 + \varepsilon q + 1)\ ;\ (q^3 \pm 1)(q^4 - q^2 + 1)\ ;$$

جایی‌که $\varepsilon = \pm$. بعلاوه برای هر عدد طبیعی n مذکور در بالا، ماکسیمال توروسی از G، مثل T موجود است به‌طوری‌که $n = |T|(2, q-1)$.

(۷) فرض کنید $G = {}^2B_2(2^{2n+1})$ گروهی ساده متناهی از نوع لی باشد، در این‌صورت مرتبه هر ماکسیمال توروس از G به صورت زیر است:

$q - 1\ ,\ q \pm \sqrt{2q} + 1$ جایی‌که $q = 2^{2n+1}$.

بعلاوه برای هر عدد طبیعی مذکور،ماکسیمال توروسی از G، از مرتبه آن عدد موجود است.

(۸) فرض کنید$G = {}^2G_2(3^{2n+1})$ گروهی ساده متناهی از نوع لی باشد، در این‌صورت مرتبه هر ماکسیمال توروس از G به صورت زیر است:

$q \pm 1\ ;\ q \pm \sqrt{3q} + 1$ جایی که $q = 3^{2n+1}$.

بعلاوه برای هر عدد طبیعی مذکور، ماکسیمال توروسی از G، از مرتبه آن عدد موجود است.

(۹) فرض کنید$G = {}^2F_4(2^{2n+1})$ گروهی ساده متناهی از نوع لی باشد، در این‌صورت مرتبه هر ماکسیمال توروس از G به صورت زیر است:

$$(q \pm 1)^2\ ;\ q^2 \pm 1\ ;\ (q^2 - q + 1)\ ;\ (q \pm \sqrt{2q} + 1)^2\ ;\ q^2 - \varepsilon q\sqrt{2q} + \varepsilon\sqrt{2q} - 1\ ;$$

$$q^2 + \varepsilon q\sqrt{2q} + q + \varepsilon\sqrt{2q} + 1.$$

جایی‌که $\varepsilon = \pm$ و $q = ۲^{۲n+۱}$.

بعلاوه برای هر عدد طبیعی مذکور، ماکسیمال توروسی از G، از مرتبه آن عدد موجود است. □

تذکر ۵.۳.۱ $E_{۶}^{-}(q) = {}^{۲}E_{۶}(q) \quad , \quad E_{۶}^{+}(q) = E_{۶}(q)$

لم ۴.۳.۱ فرض کنید n عددی طبیعی باشد.

(۱) $m_۱(B,n) = ۲^{۲n+۱} - ۱ \; ; \; m_۲(B,n) = ۲^{۲n+۱} - ۲^{n+۱} + ۱ \; ; \; m_۳(B,n) = ۲^{۲n+۱} + ۲^{n+۱} + ۱$

در این صورت به‌ازای هر $i \neq j$، $(m_i(B,n), m_j(B,n)) = ۱$.

(۲) $$m_۱(G,n) = ۳^{۲n+۱} - ۱ \; ; \; m_۲(G,n) = ۳^{۲n+۱} + ۱ \; ;$$

$$m_۳(G,n) = ۳^{۲n+۱} - ۳^{n+۱} + ۱ \; ; \; m_۴(G,n) = ۳^{۲n+۱} + ۳^{n+۱} + ۱ \; ;$$

دراین‌صورت $(m_۱(G,n), m_۲(G,n)) = ۲$ و برای $(\text{i,j}) \neq (۱,۲)$, $(m_i(G,n), m_j(G,n)) = ۱$.

(۳) $m_۱(F,n) = ۲^{۴n+۲} - ۱ \; ; \; m_۲(F,n) = ۲^{۴n+۲} + ۱ \; ; \; m_۳(F,n) = ۲^{۴n+۲} - ۲^{۲n+۱} + ۱$

$$m_۴(F,n) = ۲^{۴n+۲} - ۲^{۳n+۲} + ۲^{۲n+۱} - ۲^{n+۱} + ۱ \; ;$$

$$\mathrm{m}_۵(F,n) = ۲^{۴n+۲} + ۲^{۳n+۲} + ۲^{۲n+۱} + ۲^{n+۱} + ۱ \; ;$$

دراین صورت $(m_۱(F,n), m_۳(F,n)) = ۳$ و برای $(\text{i,j}) \neq (۱,۳)$, $(m_i(F,n), m_j(F,n)) = ۱$.

اثبات: بامحاسبات ساده حکم بدست می آید. □

لم ۵.۳.۱ فرض کنید G گروهی ساده متناهی از نوع لی روی میدان از مرتبه q با مشخصه p باشد. اگر $r,s \in \pi(G) \setminus \{p\}$، آنگاه s و r در گراف $Gk(G)$ مجاورند $(r \sim s)$ اگر و تنها اگر ماکسیمال توروسی از G مثل T موجود می‌باشد به‌طوری‌که $rs \mid |T|$.

اثبات: اگر s و r در گراف اول G مجاور باشند، آنگاه G عنصری از مرتبه rs مانند g دارد. چون $(rs,p) = ۱$، g عنصری نیمه ساده از G خواهد بود. لذا ماکسیمال توروسی از G مثل T موجود می‌باشد به‌طوری‌که $g \in T$ و $o(g) \mid |T|$.

عکس : چون ماکسیمال توروس گروه آبلی است، اگر $rs \mid |T|$، آنگاه T دارای عنصری از مرتبه rs خواهد بود. در نتیجه $rs \in \omega(G)$ و $(r \sim s)$. $\square$

گزاره ۱.۳.۱ فرض کنید $G = A_n$ گروهی متناوب از درجه n باشد.

(۱) اگر $r, s \in \pi(G)$ ، دو عدد اول فرد باشند، آنگاه s و r غیر مجاورند اگر و تنها اگر $r + s > n$.

(۲) اگر $r \in \pi(G)$ ، یک عدد اول فرد باشند، آنگاه ۲ و r غیر مجاورند اگر و تنها اگر $r + ۴ > n$.

اثبات :(۱) فرض کنید r و s غیرمجاورند. اگر $r + s \leq n$ آنگاه عناصر $g_۱, g_۲ \in A_n$ به ترتیب از مرتبه r, s یافت می شوند به طوری که $g_۱.g_۲ = g_۲.g_۱$، لذا G دارای عنصری از مرتبه rs خواهد بود که با غیر مجاور بودن s و r در تناقض است.

عکس: فرض کنید $r + s > n$، نشان می دهیم s و r غیر مجاورند. اگر $g \in G$ و $o(g) = rs$ آنگاه عناصر $a = (g^r)$ و $b = (g^s)$ به ترتیب از مرتبه های s و r موجودند به طوری که $a.b = b.a$.

ازآنجاکه a, b جابجا می شوند و توانی از یکدیگر نیستند، می توان گفت a, b هیچ عضو مشترکی در نمایش دوری خود ندارند که این با فرض $r + s > n$ در تناقض است.

حالت (۲) نیز مشابه حالت (۱) اثبات می شود. $\square$

تعریف ۵.۳.۱ تابع‌های η , ν را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta(m) = \begin{cases} m & if\ m\ is\ odd; \\ \frac{m}{۲} & otherwise. \end{cases} \quad \text{و} \quad \nu(m) = \begin{cases} m & m \equiv ۰ \pmod{۴}; \\ \frac{m}{۲} & m \equiv ۲ \pmod{۴}; \\ ۲m & m \equiv ۱ \pmod{۲}. \end{cases}$$

گزاره ۲.۳.۱ فرض کنید G گروهی ساده متناهی کلاسیک از نوع لی روی میدان از مرتبه q با مشخصه p باشد و $r \in \pi(G) \setminus \{p\}$. دراین‌صورت r و p غیر مجاورند اگر و تنها اگر یکی از حالات زیر برقرار باشد:

(۱) $e(r,q) > n-۲$, $G = A_{n-۱}(q)$، r فرد ;

(۲) $\nu(e(r,q)) > n-۲$, $G = {}^{۲}A_{n-۱}(q)$، r فرد;

(۳) $\eta(e(r,q)) > n-۱$, $G = C_n(q)$;

(۴) $\eta(e(r,q)) > n-۱$, $G = B_n(q)$;

(۵) $\eta(e(r,q)) > n-۲$, $G = D_n^{\varepsilon}(q)$;

(۶) $r = ۲$ $G = A_۱(q)$;

(۷) $(q-\varepsilon ۱)_۳ = ۳$, $r = ۳$ $G = A_۲^{\varepsilon}(q)$.

اثبات : [۱۳] را ببینید. □

گزاره ۱.۳.۳ فرض کنید G گروهی ساده متناهی‌استثنایی از نوع لی، روی میدان از مرتبه q با مشخصه p باشد و $r \in \pi(G) \setminus \{p\}$ و $k = e(r,q)$. دراین‌صورت r و p غیر مجاورند اگر و تنها اگر یکی از حالات زیر برقرار باشد:

(۱) $k \in \{۳, ۶\}$, $G = G_۲(q)$;

(۲) $k \in \{۸, ۱۲\}$, $G = F_۴(q)$;

(۳) $k \in \{۸, ۹, ۱۲\}$, $G = E_۶(q)$;

(۴) $k \in \{۸, ۱۲, ۱۸\}$, $G = {}^{۲}E_۶(q)$;

(۵) $k \in \{۷, ۹, ۱۴, ۱۸\}$, $G = E_۷(q)$;

(۶) $k \in \{۱۵, ۲۰, ۲۴, ۳۰\}$, $G = E_۸(q)$;

(۷) $k = ۱۲$, $G = {}^{۳}D_۴(q)$;

اثبات : [۱۳] را ببینید. □

گزاره ۱.۳.۴ فرض کنید G گروهی ساده متناهی‌سوزوکی یا ری ، روی میدان از مرتبه q با

مشخصه p باشد و $r \in \pi(G) \setminus \{p\}$. دراین‌صورت r و p غیر مجاورند اگر و تنها اگر یکی از حالات زیر برقرار باشد:

(۱) $r \mid m_i(B,n)$, $G = {}^{2}B_{2}(2^{2n+1})$;

(۲) $r \neq 2$, $r \mid m_i(G,n)$, $G = {}^{2}G_{2}(3^{2n+1})$;

(۳) $i > 2$, $r \neq 3$, $r \mid m_i(F,n)$, $G = {}^{2}F_{4}(2^{2n+1})$.

اثبات : [۱۳] را ببینید. $\square$