بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

ناحیه برخورد در بازی‌های تعقیب وگریز و کاربردهای آن

استاد راهنما:

دکتر علی دلاور خلفی

استاد مشاور:

دکتر محمدصابر فلاح‌نژاد

پژوهش و نگارش:

مسلم رنجبر طرقی

مهر ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

محضر حضرت ولی عصر

و

تمام ستارگان آسمان زندگی‌ام
به ویژه آن دو خورشید درخشان

پدر و مادر عزیزم

قدردانی و تشکر

باید خواست که رسید، خواستنی به قدرت عشق، عشقی به وسعت ایمان، ایمانی به عمق هستی، که هستی همه عشق است و عشق همه او، و او همه چیز، و چیزی نیست غیر او، و چیزی نیست غیر از خواستن برای رسیدن به او. به نام او، به نام او که دل را مرکز عواطف و قلب را مرکز ایمان و مغز را محل تراوش اندیشه‌ها قرار داد.

اینک که به یاری حضرت حق سبحانه و تعالی توانسته‌ام در منزلی دیگر از منازل تحصیل، خوشه‌چین میوه‌هایی جانبخش از درخت دانش و معرفت باشم بر خویش وظیفه می‌دانم به پاس تلاش و لطف همیشگی استادان گرانقدر، از آنان قدردانی کنم.

از جناب آقای دکتر علی دلاور خلفی استاد راهنمای بزرگوارم که طی طریق این تحقیق، مرهون راهنمایی‌ها و شکیبایی‌های ایشان است کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از استاد مشاور عزیزم جناب آقای دکتر محمدصابر فلاح‌نژاد به خاطر زحمات فراوان و راهنمایی‌های روشن‌گرانه صمیمانه سپاسگزارم.

سزاوار است از اساتید بزرگوار جناب آقایان دکتر سید مهدی کرباسی و دکتر سید محمد بزرگ به خاطر پیشنهادات دلسوزانه و قبول داوری این پایان‌نامه تشکر و قدردانی‌کنم.

به‌علاوه از اساتید گرانقدری همچون دکتر فرید مالک، دکتر لقمانی، دکتر مشتاقیون، دکتر مظاهری، دکتر مدرس و دیگر اساتید محترمی که در انجام و پیشبرد این پایان‌نامه مرا همراهی کردند، خالصانه ممنون وسپاسگزارم.

از دوستان عزیز و همکلاسی‌های گرانقدرم که همواره در کنارم بوده و گذران زندگی تحصیلی‌ام را با خاطرات خوش از ایشان به یادگار دارم، قدردانی می‌نمایم. همچنین تشکر ویژه خود را به منشی گروه ریاضی، سرکار خانم عباسی زاده و منشی دفتر دانشکده، سرکار خانم عابدینی تقدیم می‌کنم.

در پایان از لطف همیشگی خانواده عزیزم که بدون حمایت‌ها و دلگرمی‌های آنان رسیدن به این مرحله از زندگی برایم ناممکن بود، خالصانه سپاسگزارم و از خداوند متعال خواستارم توفیق جبران قطره‌ای هر چند اندک از مهربانی‌هایشان را به بنده عطا فرماید.

مسلم رنجبر طرقی

۱۳۸۹/۷/۲۱

فهرست مندرجات

پیشگفتار **۱**

۱ تعاریف و پیش نیازها **۴**

۱.۱ مقدمه ۵

۲.۱ فضای توپولوژی ۵

۳.۱ نظریه اندازه ۵

۴.۱ معادلات دیفرانسیل ۷

۵.۱ حساب تغییرات ۹

۱.۵.۱ مقدمه و تعاریف ۹

۲.۵.۱ شرایط لازم وکافی ۹

۶.۱ کنترل بهینه ۱۱

۱.۶.۱ مقدمه و تعاریف ۱۱

۲.۶.۱ تکنیک‌های حل مساله ۱۲

۷.۱ نظریه بازی ۱۶

۱.۷.۱ مقدمه و تعاریف ۱۶

۲.۷.۱ تعادل نقطه زینی ۱۹

۳.۷.۱ تعادل نش ۲۲

۲ بازی دیفرانسیلی **۲۴**

۱.۲ مقدمه ۲۵

۲.۲ بازی N نفره ۲۵

۱.۲.۲ مقدمه و تعاریف ۲۵

۲.۲.۲ نقاط تعادلی حلقه باز ۲۹

۳.۲.۲ نقاط تعادلی پس‌خورد ۳۱
۳.۲ بازی تعقیب وگریز ۳۳
۱.۳.۲ مقدمه ۳۳
۲.۳.۲ استراتژی بهینه هندسی ۳۴
۳.۳.۲ شرایط لازم و کافی برای تعادل نقطه زینی ۳۶
۴.۳.۲ مثالی کاربردی از بازی تعقیب وگریز ۴۱
۵.۳.۲ حل بازی تعقیب وگریز با تکنیک حساب تغییرات ۴۴

۳ ناحیه برخورد در مدل‌های رهگیری زمان-نامتغیر ۵۰
۱.۳ مقدمه ۵۱
۲.۳ بیان مساله ۵۱
۱.۲.۳ مدل تعاملی بازی ۵۱
۲.۲.۳ ساده‌سازی مساله به سیستم اسکالر ۵۴
۳.۲.۳ تعاریف اولیه ۵۶
۳.۳ انتقال به مبدا ۵۸
۴.۳ کرانداری استراتژی تعقیب‌کننده ۵۹
۵.۳ تحلیل ناحیه برخورد ۶۱
۱.۵.۳ ویژگی‌های کلی ۶۱
۲.۵.۳ نابدیهی بودن ناحیه برخورد ۶۲
۳.۵.۳ شکل ناحیه برخورد ۶۶
۶.۳ تعمیم شرایط داشتن ناحیه برخورد نابدیهی ۶۸
۱.۶.۳ نتایج تحلیلی ۶۸
۲.۶.۳ مثال تاییدی ۷۱
۳.۶.۳ شکل ناحیه برخورد ۷۳
۷.۳ جواب مساله رهگیری اصلی ۷۶
۸.۳ استراتژی کنترل ارزان ۷۸
۱.۸.۳ وجود ناحیه برخورد نابدیهی ۸۱
۲.۸.۳ ساختار ناحیه برخورد ۸۳

۴ ناحیه برخورد در مدل‌های رهگیری زمان-متغیر ۸۸

۱.۴ مقدمه ۸۹
۲.۴ بیان مساله ۸۹
۱.۲.۴ مدل تعاملی بازی ۸۹
۲.۲.۴ مساله رهگیری ۹۱
۳.۲.۴ ساده‌سازی مساله به سیستم اسکالر ۹۲
۳.۴ جواب مساله رهگیری اسکالر ۹۳
۱.۳.۴ استراتژی انتقال‌دهنده ۹۳
۲.۳.۴ مجموعه برخورد ۹۸
۴.۴ جواب مساله رهگیری اصلی ۱۰۲
۵.۴ مثالی از یک سناریوی دفاع موشکی ضد بالستیک ۱۰۳
۱.۵.۴ نتایج تحلیلی ۱۰۳
۲.۵.۴ مثال عددی ۱۰۴

۵ ناحیه برخورد در بازی‌های تعقیب وگریز راندن ۱۰۶
۱.۵ مقدمه ۱۰۷
۲.۵ مدل سیستم ۱۰۷
۳.۵ پیدا کردن مسیر بهینه ۱۰۸
۴.۵ نتایج شبیه‌سازی ۱۱۱
۵.۵ ناحیه برخورد ۱۱۳
۶.۵ مثالی از یک سناریوی رباتیکی ۱۱۴

نتیجه‌گیری ۱۱۶

واژه‌نامه ۱۱۸

کتاب‌نامه ۱۲۳

چکیده

در این پایان‌نامه سعی بر آن است تا ناحیه برخورد در مسائل رهگیری و راندن یک هدف متحرک بررسی و کاربردهایی از آن بیان شود. مسائل رهگیری یا راندن یک شی (هدف) توسط دیگری (رهگیر)، مساله‌ای مهم از نقطه نظر تئوری و عملی است. این دسته از مسائل به‌صورت‌های گوناگونی مانند کنترل بهینه، کنترل مقاوم، حساب تغییرات و یا بازی دیفرانسیلی مجموع صفر بیان و تحلیل می‌شوند که رهگیر و هدف بعنوان تعقیب‌کننده و گریزنده ایفای نقش می‌کنند.

پیشگفتار

مسائل رهگیری یا راندن یک هدف متحرک، مساله‌ای مهم از نقطه نظر تئوری و عملی است که در چارچوب بازی‌های تعقیب و گریز بیان می‌شود. بازی‌های تعقیب و گریز از جمله مسائل بهینه‌سازی مهم، جذاب و رایج هستند که رویارویی اهداف متحرک مانند زیردریایی و کشتی، کشتی و اژدر، دو ربات و کاربردهای آن در هدایت موشک، کنترل هواپیما و تاکتیک‌های هوایی را مورد بررسی قرار می‌دهند. بعنوان مثال بسیار ساده‌ای از این نوع، می‌توان حیوان درنده‌ای را در نظر گرفت که شکار خود را دنبال می‌کند تا آن را شکار کند. اگر P نشانگر تعقیب‌کننده و E نمایانگر گریزنده باشد، بازیکن P ، E را تعقیب می‌کند تا فاصله دو بازیکن از حد مشخصی مانند $l \geq 0$ کمتر شود که در این حالت گفته می‌شود P ، E را گرفته است و یا P ، E را به مکان خاصی هدایت کند.

در حالت کلی بازی‌های تعقیب و گریز به دو صورت کلاسیک و راندن بحث می‌شوند. در بازی‌های تعقیب و گریز کلاسیک، تعقیب‌کننده، گریزنده را دنبال می‌کند تا آن را بگیرد. درصورتی‌که در بازی‌های تعقیب و گریز راندن، تعقیب‌کننده درصدد است گریزنده را به مکان مشخصی هدایت کند.

بازی‌های تعقیب و گریز راندن را می‌توان با استفاده از مساله حساب تغییرات بررسی کرد و قانون کنترل بهینه‌ی مورد نظر را به‌دست آورد. اهمیت بررسی این دسته از بازی‌های تعقیب و گریز در مسائل رباتیکی و کاربردهای آن است.

مساله رهگیری یک هدف متحرک به روش‌های گوناگونی مانند کنترل بهینه، کنترل مقاوم و یا یک بازی دیفرانسیلی مجموع صفر بیان و تحلیل می‌شود که رهگیر و هدف بعنوان تعقیب‌کننده و گریزنده ایفای نقش می‌کنند. در آغاز شکل‌گیری تئوری کنترل بهینه، لتو[1] [۱۹] و کالمن[2] [۱۴] یک مساله تنظیم‌کننده درجه دو خطی را بدون اعمال هیچ محدودیتی روی کنترل‌ها حل کردند که براساس آن جواب‌ها، قوانین هدایت مختلف رهگیر با انتخاب دقیق ضرایب شاخص عملکرد نتیجه شدند. ولی اساسا مساله کنترل بهینه گزینه‌ی مناسبی برای تحلیل این دسته از مسائل

[1] Letov
[2] Calman

نیست، زیرا حرکت هدف به‌صورت مستقل کنترل می‌شود.

بیان دیگر مساله به‌صورت مساله کنترل مقاوم در کلاس استراتژی‌های پس‌خورد است. اگر استراتژی تعقیب‌کننده معین باشد، نماد جدیدی تحت عنوان ناحیه برخورد معرفی می‌شود. ناحیه برخورد از دیدگاه کنترل مقاوم، مجموعه همه‌ی موقعیت‌های اولیه است به‌طوری‌که برخورد توسط این استراتژی در مقابل هر کنترل مجاز گریزنده نتیجه شود و قیود کنترل تعیین شده صادق باشند. استراتژی که ناحیه برخورد آن نابدیهی باشد (منطبق بر مبدا نباشد)، استراتژی اطمینان‌دهنده‌ی برخورد نامیده می‌شود. ناحیه برخورد حالت خاصی از یک مجموعه نامتغیر مثبت مجاز است که مجموعه هدف را شامل می‌شود [۵].

روش متداول دیگر برای بیان این‌گونه از مسائل، بیان آن در چارچوب بازی دیفرانسیلی تعقیب و گریز مجموع صفر است. این روش، نه تنها توانایی ایجاد قوانین بهینه هدایت رهگیر را ممکن می‌سازد، بلکه اجازه تخمین فاصله انتهایی را در مقابل بدترین حالت حرکت هدف نتیجه می‌دهد. در ابتدا شینار[۱] [۳۰] و سپس شیما[۲] و شینار [۲۹] استراتژی‌های بهینه تعقیب‌کننده از نوع بنگ–بنگ[۳] را بیان کردند. استراتژی بنگ–بنگ، ناحیه برخورد ماکسیمال را داراست. به‌هرصورت این مساله منجر به یک کنترل چترینگ[۴] می‌شود. علاوه‌براین، موقعیت‌های اولیه‌ی عملی دور از مرزهای ناحیه برخورد ماکسیمال قرار دارند. این مساله انگیزه‌ای برای ساختن استراتژی اطمینان‌دهنده‌ی پیوسته و حتی هموار را می‌دهد. این مساله ممکن است ناحیه برخورد کوچکتر را نتیجه دهد، ولی می‌تواند نیاز به کنترل بازگرداننده[۵] کوچکتری داشته باشد.

مساله رهگیری غیرخطی اولیه را می‌توان به مساله رهگیری خطی با اعمال فرضیات ساده تبدیل کرد. لذا بازی دیفرانسیلی استفاده شده برای قوانین هدایت، بازی دیفرانسیلی درجه دو خطی کلاسیک [۱۲] است $(LQDG)$[۶]. تابع مقدار در این بازی شامل مربع فاصله انتهایی و جملات انتگرالی جریمه‌ای درجه دو برای کنترل‌های تعقیب‌کننده و گریزنده با ضرایب ثابتی است. جواب این بازی دیفرانسیلی توسط یک کنترل پس‌خورد خطی داده می‌شود که ضرایب بیان شده از قبل براساس جواب‌های معادله دیفرانسیل ریکاتی محاسبه می‌شوند. چون این استراتژی کنترل، پیوسته و به آسانی قابل محاسبه و کاربرد است، گزینه‌ی بسیار جالب توجه و مناسبی برای قوانین هدایت است.

اگرچه این مساله یک استراتژی تعقیب‌کننده خطی به‌دست می‌دهد، ولی این استراتژی فاصله

---

[۱] Shinar

[۲] Shima

[۳] Bang – bang strategy

[۴] Control chattering

[۵] Control effort

[۶] Linear Quadratic Differential Game

انتهایی صفر را در مقابل هر کنترل مجاز گریزنده (به‌طور مقاوم) به‌دست نمی‌دهد. روش مناسب برای ایجاد فاصله انتهایی صفر به‌طور مقاوم، اصلاحی بر استراتژی تعقیب‌کننده $LQDG$ با کنترل‌های ارزان است یعنی هنگامی‌که ضرایب جریمه‌ای در بازی دیفرانسیلی بیان شده به سمت صفر میل کنند. لذا جواب کنترل ارزان $LQDG$ اجازه بهبود قوانین هدایت را می‌دهد و می‌توان مفهوم ناحیه برخورد را پیاده‌سازی کرد.

این دسته از مسائل را می‌توان به دو صورت زمان–نامتغیر و زمان–متغیر مورد بررسی قرار داد. در حالت زمان–نامتغیر، سرعت‌ها و شتاب‌های تعقیب‌کننده و گریزنده ثابت هستند و در طول زمان تغییر نمی‌کنند، درصورتی‌که در حالت زمان–متغیر سرعت‌ها و شتاب‌ها در طول زمان تغییر می‌کنند.

استراتژی‌های اطمینان‌دهنده‌ی برخورد هموار و پیوسته توسط تورتسکی[۱] و شینار [۳۸]، تورتسکی [۳۱] و تورتسکی و گلیزر[۲] [۳۴] براساس یک بازی دیفرانسیلی درجه دو خطی با کنترل‌های ارزان بیان شدند. این استراتژی‌ها توسط کنترل‌های خطی زمان–متغیر نتیجه شدند.

اهمیت مسائل رهگیری در بررسی هدایت موشک‌ها است. مساله هدایت موشک در حالت کلی و رهگیری اهداف هوایی در حالت خاص، قسمت مهمی از فعالیت‌های کنترل هوافضا را شامل می‌شوند. به‌طور اخص، در دهه‌ی اخیر توجه ویژه‌ای روی دفاع موشکی ضد بالستیک شده است. این سناریوی موشکی در چارچوب بازی دیفرانسیلی تعقیب و گریز مجموع صفر بیان می‌شود که رهگیر و هدف بعنوان تعقیب‌کننده و گریزنده ایفای نقش می‌کنند و تعقیب‌کننده درصدد کمینه‌سازی و گریزنده به‌دنبال بیشینه‌سازی مساله است. جواب بازی تعقیب و گریز، قانون هدایت موشک (استراتژی بهینه‌ی تعقیب‌کننده) را نتیجه می‌دهد.

پایان‌نامه حاضر مشتمل بر پنج فصل است. در فصل اول مفاهیم و تعاریفی که در فصل‌های بعد استفاده خواهد شد، به‌طور مختصر مورد بحث قرار گرفته‌اند. در فصل دوم بازی‌های دیفرانسیلی و در حالت خاص، بازی‌های تعقیب وگریز را با جزئیات کامل معرفی نموده و در فصل سوم، مساله رهگیری هدف متحرک و ناحیه برخورد در حالت زمان–نامتغیر بررسی شده است. در فصل چهارم ناحیه برخورد در مسائل رهگیری زمان–متغیر بررسی و کاربردی از آن ارائه شده است. در نهایت در فصل پنجم، مساله راندن یک شی متحرک بیان و کاربردی از آن مورد بررسی قرار گرفته است.

[۱] Turetsky

[۲] Glizer

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

۱.۱ مقدمه

در این فصل به‌طور مختصر به مفاهیمی که در این پایان‌نامه مورد نیاز هستند، اشاره می‌کنیم. در ابتدا به معرفی کوتاهی از فضای توپولوژی، نظریه اندازه و معادلات دیفرانسیل پرداخته و سپس به مساله حساب تغییرات، کنترل بهینه و نظریه بازی می‌پردازیم.

۲.۱ فضای توپولوژی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. گردایه τ از زیر مجموعه‌های X را یک توپولوژی بر X گوییم اگر τ در خواص زیر صدق نماید [۱]:

الف) $\emptyset \in \tau$ ، $X \in \tau$

ب) هرگاه U و V متعلق به τ باشند، آنگاه $U \cap V \in \tau$.

پ) هرگاه $\{V_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از اعضای τ باشد، آنگاه $\bigcup\limits_{i\in I} V_i \in \tau$.

هرگاه τ یک توپولوژی بر مجموعه X باشد، آنگاه جفت (X, τ) یک فضای توپولوژیک نام دارد. اعضای τ را مجموعه‌های باز X می‌نامیم.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. در این صورت $\tau = \{\emptyset, X\}$ یک توپولوژی بر X است که توپولوژی ناگسسته نامیده می‌شود. همچنین $\tau = P(X)$ نیز یک توپولوژی بر X است که توپولوژی گسسته نامیده می‌شود. در توپولوژی گسسته، هر زیرمجموعه X یک مجموعه باز است. توپولوژی ناگسسته کوچکترین توپولوژی ممکن و توپولوژی گسسته بزرگترین توپولوژی ممکن است.

۳.۱ نظریه اندازه

در پایان قرن نوزده ریاضیدانان می‌دانستند که خواص توابع پیوسته و نظریه انتگرال ریمان برای حل مسایل زیادی در آنالیز کافی نیستند. ناکافی بودن توابع پیوسته، آنها را به تحقیق در رده‌های

متفاوتی از توابع که جواب مسایل مختلف را به‌دست دهند، واداشت. ای بورل [۱] در سال ۱۸۹۸ نخستین کسی بود که نظریه اندازه را روی زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی که در حال حاضر به مجموعه‌های بورل معروفند، پایه گذاری کرد. چیزی نگذشت که اچ لبگ [۲] (در سال ۱۹۰۲) اندازه لبگ را ارائه داد و پس از آن نظریه اندازه به سرعت توسعه یافت. در ادامه، به معرفی مختصری از این نظریه می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم S گردایه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌ها از مجموعه‌ی ناتهی X باشد. گردایه‌ی S را یک جبر از مجموعه‌ها (یا فقط یک جبر) می‌نامیم اگر در خواص زیر صدق نماید:

الف) $\emptyset \in S$

ب) هرگاه $A, B \in S$، آنگاه $A \cap B \in S$

ج) هرگاه $A \in S$، آنگاه $A^c \in S$

تعریف ۲.۳.۱. جبر S از زیر مجموعه‌های مجموعه X را یک σ–جبر [۳] (σ–فیلد [۴]) می‌نامیم اگر هر اجتماع از یک گردایه‌ی شمارش‌پذیر از اعضای S مجددا در S باشد، یعنی علاوه بر اینکه S یک جبر است، $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ به ازای هر دنباله $\{A_n\}$ از S متعلق به S باشد.

یک خانواده از مجموعه‌ها، مجموعه‌ای ناتهی مانند F است که اعضایش خود مجموعه‌اند. هر گردایه از زیرمجموعه‌های F از مجموعه‌ی ناتهی X مشمول کوچکترین σ–جبر است. این σ–جبر اشتراک تمام σ–جبرهایی است که شامل Fاند و آن را σ–جبر تولید شده به‌وسیله F می‌نامند. یک σ–جبر مهم از مجموعه‌ها، σ–جبر تمام مجموعه‌های بورل از یک فضای توپولوژیک است که تعریف آن در زیر آمده است:

تعریف ۳.۳.۱. مجموعه‌های بورل فضای توپولوژیک (X, τ)، اعضای σ–جبر تولید شده به‌وسیله‌ی مجموعه‌های باز (یعنی توسط τ) هستند. σ–جبر تمام مجموعه‌های بورل (X, τ) با $\mathcal{B}$ نشان داده می‌شود.

حال به معرفی مفهوم اندازه می‌پردازیم [۲۶]:

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم S ، σ–جبری از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای مانند X باشد. دراین‌صورت تابع $\mu : S \mapsto [0, \infty]$ را یک اندازه بر S نامیم اگر از خواص زیر بهره‌مند باشد:

الف) $\mu(\emptyset) = 0$

---

[۱] E.Borel
[۲] H.Lebesgue
[۳] σ-algebra
[۴] σ-field

ب) هرگاه $\{A_n\}$ دنباله‌ای از هم‌جدا از S با $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ باشد، آنگاه $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ برقرار است، یعنی μ، $\sigma-$جمعی است.

سه تایی (X,S,μ) که در آن X یک مجموعه ناتهی، S یک $\sigma-$جبری از مجموعه‌های X و μ یک اندازه روی S است، فضای اندازه نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۳.۱. زیرمجموعه‌ی E از X را اندازه‌پذیر (یا به‌طور دقیق‌تر، μ اندازه‌پذیر) می‌نامیم اگر به ازای هر $A \subseteq X$ داشته باشیم:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$$

گردایه‌ی تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر با Λ نمایش داده می‌شود، یعنی

$$\Lambda_\mu = \{E \subseteq X : \ \mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) \ \ , \forall A \subseteq X\}$$

قضیه ۶.۳.۱. گردایه‌ی Λ مرکب از تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر، یک $\sigma-$جبر از زیرمجموعه‌های X است.

اثبات: [۱]

در ادامه به معرفی فضای L^p و نامساوی‌های هولدر و کشی-شوارتز می‌پردازیم.

تعریف ۷.۳.۱. $0 < p < \infty$ را در نظر می‌گیریم. گردایه‌ی تمام توابع اندازه‌پذیر f که $|f|^p$ انتگرال پذیر است با $L^p(\mu)$ یا $L^p(X)$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۸.۳.۱. (نامساوی هولدر) فرض کنیم $1 < p < \infty$ و $1 < q < \infty$ چنان موجود باشند که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. هرگاه $f \in L^p(\mu)$ و $g \in L^q(\mu)$، آنگاه $fg \in L^1(\mu)$ و داریم:

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p \ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int |g|^q \ d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

اثبات: [۱]

در حالت خاص $p = q = 2$، $L^2(X)$ نمایش دهنده‌ی گردایه‌ی تمام توابع اندازه‌پذیر f است که $|f|^2$ انتگرال‌پذیر است. در این حالت نامساوی هولدر به نامساوی کشی-شوارتز معروف است.

۴.۱ معادلات دیفرانسیل

هر معادله شامل مشتقات (یا دیفرانسیل‌های) یک یا چند متغیر وابسته مانند $y_1, ..., y_j$ نسبت به یک یا چند متغیر مستقل مانند $x_1, ..., x_k$ یک معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود. منظور از جواب

چنین معادله‌ای روی ناحیه R یعنی مجموعه‌ای از توابع مشتق‌پذیر مانند

$$y_1(x_1, ..., x_k), y_2(x_1, ..., x_k), ..., y_j(x_1, ..., x_k)$$

که وقتی در معادله قرار می‌گیرند، آن را به یک اتحاد در تمام نقاط R تبدیل می‌کنند. بررسی وجود، سرشت و تعیین جواب‌های معادلات دیفرانسیل از اهمیتی اساسی، نه فقط نزد ریاضیدانان محض، بلکه هر کس که درگیر تحلیل ریاضی پدیده‌های طبیعی است برخوردار است.
هرگاه مشتقات موجود در یک معادله دیفرانسیل مشتقات کلی باشند، معادله دیفرانسیل یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) و هرگاه مشتقات جزئی ظاهر شوند، معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) نامیده می‌شود. مرتبه یک معادله دیفرانسیل، مرتبه بالاترین مشتقی است که در معادله موجود است. در حالت کلی، دو نوع جواب برای یک معادله دیفرانسیل در نظر می‌گیرند:
الف) جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل که عبارت از دسته توابعی است که در آن به تعداد مرتبه معادله، اعداد ثابت وجود دارد و هر جواب معادله را می‌توان با انتخاب مقادیر مناسبی برای اعداد ثابت به‌دست آورد.
ب) جواب خاص: اگر بین دسته جواب‌های به‌دست آمده برای یک معادله دیفرانسیل جوابی را بخواهیم که از نقطه یا نقاط خاصی بگذرد، آن را جواب خاص می‌نامیم. درواقع تحت شرط یا شرایطی از بین دسته جواب‌ها، یک جواب خاص به‌دست می‌آوریم.
معادله‌ای که خطی است، یعنی نسبت به متغیر وابسته و مشتقاتش از درجه اول است، یک معادله دیفرانسیل خطی نامیده می‌شود. از این تعریف نتیجه می‌شود که تعریف عمومی معادله دیفرانسیل خطی (معمولی) مرتبه n به صورت زیر است:

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = r(x) \quad , p_0(x) \neq 0 \qquad (1.4.1)$$

اگر $r(x) \equiv 0$، آنگاه معادله را همگن و درصورتی‌که $r(x)$ ناصفر باشد، معادله را غیر همگن می‌نامند. معادله دیفرانسیلی که خطی نباشد، یعنی به صورت معادله (۱.۴.۱) درنیاید، غیر خطی نامیده می‌شود. از انواع معادلات دیفرانسیل غیر خطی مرتبه اول، می‌توان از معادله‌ی برنولی و معادله ریکاتی نام برد. معادله ریکاتی به فرم کلی زیر است:

$$y' = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2 \qquad (2.4.1)$$

برای حل این معادله فرض می‌کنیم که y_1 یک جواب خاص آن باشد، آنگاه جواب عمومی آن به فرم $y = y_1 + \frac{1}{V(x)}$ است که با قرار دادن y در معادله(۲.۴.۱) و ساده‌سازی آن، تابع V از معادله دیفرانسیل خطی زیر به‌دست می‌آید:

$$V' + (q_2 + 2q_3y_1)V = -q_3$$

۵.۱ حساب تغییرات

۱.۵.۱ مقدمه و تعاریف

حساب تغییرات علمی است که به مطالعه‌ی بهینه‌سازی تابعک‌ها با مجموعه‌ای از قیود می‌پردازد. در حقیقت حساب تغییرات نامی است که به نظریه بهینه‌سازی انتگرال‌ها اطلاق می‌شود. یکی از اولین مسایل در این زمینه شامل کمینه کردن یک انتگرال است که به‌وسیله‌ی جان برنولی [۱] در سال ۱۶۹۴ مطرح شد. هدف این مساله، تعیین بستر حرکت یک گلوله صیقلی تحت نیروی جاذبه در مسیر یک سیم همواری است که دو نقطه A و B را (که در طول یک خط قائم قرار ندارند) به هم وصل می‌کند [۲۴].

یک مساله حساب تغییرات در حالت کلی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$J = \int_{t_\circ}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

هدف پیدا کردن تابع $x^*(t)$ از مجموعه‌ی همه‌ی توابع مجاز $x(t)$ است که مقدار J را تحت قیود مشخصی بهینه (کمینه) کند. منظور از مجموعه‌ی توابع مجاز $x(t)$، مجموعه‌ی همه‌ی توابع هموراری است که در شرط نقطه پایانی صدق کند.

فرض می‌شود که تابع زیر انتگرال، $L(t, x(t), \dot{x}(t))$، در شرایط زیر صدق کند:

تابع L در همه نقاط $(t, x(t), \dot{x}(t))$ تعریف شده باشد و حداقل دو بار مشتق‌پذیر باشد، یعنی تابع L پیوسته و دارای مشتقات جزئی پیوسته نسبت به متغیرهایش باشد.

۲.۵.۱ شرایط لازم وکافی

پیش از بیان شرایط لازم برای بهینگی، دو مفهوم جواب ضعیف و قوی را معرفی می‌کنیم [۲۴].

تعریف ۱.۵.۱. تابع $x^*(t)$ یک جواب قوی برای مساله حساب تغییرات خواهد بود اگر $\varepsilon > \circ$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای تمام توابع مجاز $x(t)$ داشته باشیم $J(x^*(t)) \leq J(x(t))$ و

$$d_\circ(x(t), x^*(t)) = \max_{x \in [x(t_\circ), x(t_1)]} |x(t) - x^*(t)| < \varepsilon$$

تعریف ۲.۵.۱. تابع $x^*(t)$ یک جواب ضعیف برای مساله حساب تغییرات نامیده می‌شود اگر $\varepsilon > \circ$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای تمام توابع مجاز $x(t)$ داشته باشیم $J(x^*(t)) \leq J(x(t))$ و

$$d_1(x(t), x^*(t)) = \sup_{x \in [x(t_\circ), x(t_1)]} (\ |x(t) - x^*(t)| + |\dot{x}(t) - \dot{x}^*(t)|\ ) < \varepsilon$$

[۱] John Bernoulli

اکنون به بیان اولین شرط لازم برای بهینگی تابع مجاز $x^*(t)$ می‌پردازیم.
شرط لازم اویلر: اگر تابع $x^*(t)$ که دارای مشتقات مرتبه اول و دوم پیوسته است، یک جواب کمینه‌کننده‌ی ضعیف یا قوی برای مساله‌ی حساب تغییرات باشد بایستی در معادله دیفرانسیل اویلر زیر صدق کند:

$$L_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) = ۰ \qquad (۳.۵.۱)$$

بنابراین شرط لازم اویلر مجموعه‌ای از توابع را نتیجه می‌دهد که می‌توانند برای حل مساله‌ی حساب تغییرات بدون توجه به ضعیف یا قوی بودن جواب استفاده شوند. علاوه بر شرط اویلر، شرط لژاندر را که شرط لازم آسانتری است در ادامه بیان می‌کنیم.
شرط لازم لژاندر: اگر $x^*(t)$ تابع هموازی باشد که جواب ضعیفی برای مساله‌ی حساب تغییرات نتیجه دهد، آنگاه:

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \geq ۰ \qquad , \forall x(t) \in [x(t_۰), x(t_۱)] \qquad (۴.۵.۱)$$

علاوه بر شرایط لازم اشاره شده در بالا، شرط لازم قوی‌تری توسط وایرشتراس ارائه شده است که ابزاری برای بررسی کمینه‌کننده‌های قوی ایجاد می‌کند.
شرط لازم وایرشتراس: اگر تابع $x^*(t)$ یک جواب قوی برای مساله‌ی حساب تغییرات نتیجه دهد، آنگاه در هر نقطه $x(t) \in [x(t_۰), x(t_۱)]$ و به ازای هر $q \in R$ ، تابع وایرشتراس نامنفی است یعنی

$$\begin{aligned} &E(t, x^*(t), \dot{x}^*(t), q) = \\ &L(t, x^*(t), q) - L(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - (q - \dot{x}^*(t)) L_{\dot{x}^*}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \geq ۰ \end{aligned} \qquad (۵.۵.۱)$$

شرایط لازم بیان شده تاکنون تضمینی مبنی بر اینکه یک اکسترمال نتیجه شده از حل معادله دیفرانسیل اویلر جوابی از مساله حساب تغییرات باشد، نمی‌دهد. حال قضیه‌ای بیان می‌کنیم که تضمین می‌دهد جواب به‌دست آمده از معادله دیفرانسیل اویلر، جوابی از مساله حساب تغییرات خواهد بود.

قضیه ۳.۵.۱. اگر تابع انتگرالده L در مساله حساب تغییرات نسبت به متغیرهای $(x(t), \dot{x}(t))$ برای هر t محدب باشد، تابع هموار $x(t)$ که در معادله دیفرانسیل اویلر صدق کند جوابی از مساله مورد نظر خواهد بود.

اثبات: [۱۸]

۶.۱ کنترل بهینه

۱.۶.۱ مقدمه و تعاریف

مساله کنترل بهینه، دسته‌ای از مسایل بهینه‌سازی است که در واقع از سال‌های ۱۹۵۰ به خاطر فعالیت‌های آمریکا و روسیه در رابطه با کشفیات در منظومه شمسی آغاز گردید. در واقع مسایل ریاضی سفینه‌های فضایی شامل مسایل بهینه‌سازی است. هدف، تعیین مسیرهایی است که یک فضاپیما که با یک موتور راکت کوچک در راستای آن مسیرها کنترل و هدایت می‌شود، به هدف مورد نظرش در کمترین زمان ممکن و یا با کمترین سوخت مصرف شده برسد. این نوع مسایل جدید با روش‌هایی که تاکنون ابداع شده بودند، قابل حل نبودند و یک نظریه‌ی جدید که ریشه‌ی آن به قرن هجدهم باز می‌گشت، می‌بایست توسعه می‌یافت تا بتواند مسایل جدید را حل کند. به خاطر عملی بودن نظریه کنترل بهینه در محاسبات و اجرای کنترل‌های بهینه، این نظریه به سرعت وارد تعداد زیادی از زمینه‌ها و علوم مختلف شد و روزبه‌روز گسترش پیدا کرد.

در حالت کلی یک مساله کنترل بهینه به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۱]:

فرض کنیم $\bar{U}$ زیرمجموعه‌ای بسته از E^m و (t, x, u) متغیرهایی در (E, E^n, E^m) باشند و $f(t, x, u)$ یک تابع برداری $f : E^1 \times E^n \times E^m \mapsto E^n$ باشد که پیوسته و دارای مشتق جزئی اول پیوسته نسبت به x است. همچنین فرض کنیم $\Phi(t_0, t_1, x_0, x_1)$ یک تابع برداری $\Phi : E^1 \times E^1 \times E^n \times E^n \mapsto E^k$ متعلق به کلاس C^1 باشد. فرض کنیم U مجموعه‌ای از توابع تکه‌ای پیوسته $u(t)$ با مقادیری در $\bar{U}$ باشد. تابع $u(t)$ در U، یک کنترل نامیده می‌شود. برای یک کنترل $u(t)$ تعریف شده روی $[t_0, t_1]$، جواب $x(t)$ از معادله دیفرانسیل

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \tag{۶.۶.۱}$$

روی بازه $[t_0, t_1]$ با شرط اولیه $x(t_0) = x_0$، مسیر متناظر با کنترل $u(t)$ و شرط اولیه x_0 نامیده می‌شود. معادله دیفرانسیل (۶.۶.۱) معادله حرکت (وضعیت) سیستم و مقدار $x(t)$ در زمان t را وضعیت سیستم در زمان t می‌نامیم.

اولین مولفه Φ محاسبه شده در $(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1))$ که $x(t)$ جوابی از معادله حرکت است،

$$\Phi_1(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) \tag{۷.۶.۱}$$

شاخص عملکرد سیستم نامیده می‌شود. برای مشخص کردن وابستگی عملکرد به حالت اولیه $x_0 = x(t_0)$ و کنترل $u(t)$، (۷.۶.۱) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(x_0, u) = \Phi_1(e) \quad , e = (t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) \tag{۸.۶.۱}$$

$k - ۱$ مولفه‌ی دیگر Φ به‌صورت $\Phi_j(t_\circ, t_۱, x(t_\circ), x(t_۱)) = \circ\ (j = ۲, ..., k)$ تعریف می‌شوند و شرایط پایانی برای مسیرهای سیستم هستند. یک جفت $(x_\circ, u)$ از یک شرط اولیه $x_\circ$ و کنترل $u = u(t)$ مجاز نامیده می‌شود اگر یک جواب $x(t)$ از معادله حرکت روی $[t_\circ, t_۱]$ با شرط اولیه $x(t_\circ) = x_\circ$ و شرایط پایانی وجود داشته باشد. فرض کنیم $\mathcal{F}$ کلاس جفت‌های مجاز $(x_\circ, u)$ باشد. مساله کنترل بهینه پیدا کردن عضوی مانند $(x_\circ, u)$ در کلاس $\mathcal{F}$ است به‌طوری‌که شاخص عملکرد متناظر کمینه شود. جفت $(x_\circ, u)$ از $\mathcal{F}$ که این کمینه را نتیجه می‌دهد، یک شرط اولیه بهینه و یک کنترل بهینه نامیده می‌شود.

مسایل هم ارز

اصولا مساله کنترل بهینه تعریف شده در بالا را مساله مایر می‌نامند. حال فرض کنیم $L(t, x, u)$ یک تابع پیوسته $L : E^۱ \times E^n \times E^m \mapsto E^۱$ از کلاس $C^۱$ در (x, u) باشد. اگر به‌جای شاخص عملکرد (۸.۶.۱) شاخص عملکرد

$$J(x_\circ, u) = \int_{t_\circ}^{t_۱} L(t, x(t), u(t))dt$$

را به کار گیریم، مساله کنترل بهینه یک مساله لژاندر و همچنین اگر شاخص عملکرد

$$J(x_\circ, u) = \Phi_۱(e) + \int_{t_\circ}^{t_۱} L(t, x(t), u(t))dt$$

را در نظر بگیریم، با یک مساله بولزا رو به رو خواهیم بود.
سه مساله کنترل بهینه بیان شده در بالا هم ارز هستندکه اثبات آن در [۱۱] آمده است.

کنترل پس‌خورد و حلقه باز

در حالت کلی دو نوع مختلف کنترل وجود دارد. اگر کنترل بهینه به‌صورت $u^* = u(t, x(t))$ بیان شود، کنترل مورد نظر پس‌خورد نامیده می‌شود. در این کنترل، u قاعده‌ای است که کنترل بهینه را در زمان t به ازای هر مقدار وضعیت در زمان t تغییر دهد. در مقابل اگر کنترل بهینه به‌صورت تابعی از زمان برای وضعیت اولیه مشخصی تعیین شده باشد، کنترل را حلقه باز می‌نامند. بنابراین کنترل بهینه حلقه باز فقط برای وضعیت اولیه‌ی خاصی بهینه است، درحالی‌که اگر قاعده‌ی کنترل مشخص باشد از هر وضعیت اولیه‌ای، کنترل بهینه حاصل خواهد شد [۱۶].

۲.۶.۱ تکنیک‌های حل مساله

حال دو تکنیک برنامه‌ریزی پویا و اصل مینیمم را برای حل مساله کنترل بهینه بیان می‌کنیم.