۱۱۰۶۰۱

۸۷/۱/۱۰۶۰۴۳
۸۷/۱۱/۳

دانشگاه مازندران
دانشکده علوم

جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد آمار

عنوان:

قوانین اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی فازی

استاد راهنما:

دکتر بهرام صادق پور

استاد مشاور:

دکتر حمیدرضا نیلی ثانی

نگارش:

عاطفه سادات اختر

شهریور ۸۷

تشکر و قدردانی:

خداوند بلند مرتبه را شاکرم که توفیقی نصیبم نمود تا پله‌ای دیگر از مدارج علم را بپیمایم. بر خود لازم می دانم از عزیزانی که در این مسیر مرا یاری نموده اند، قدر دانی نمایم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر بهرام صادق پور که راهنمایی پایان نامه اینجانب را بر عهده داشتند و مرا در پیمودن این راه یاری نمودند، صمیمانه تشکر و قدر دانی می نمایم.

از جناب آقای دکتر حمید رضا نیلی ثانی به عنوان استاد مشاور که در این مدت همواره از لطف ، همکاری و حمایت های ایشان بهرمند بودم ،صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم و زیباترین آرزوها را از درگاه خداوند منان برایشان خواستارم.

از اساتید محترم عضو کمیته پایان نامه جناب آقایان دکتر پوردرویش ، دکتر اصغرزاده و سرکار خانم دکتر محمدپور که قبول زحمت نموده و پایان نامه اینجانب را مطالعه نمودند، تشکر و قدردانی می نمایم.

از مسئولین و کارکنان بخش آمار دانشکده علوم که همکاری صمیمانه ای داشته اند، سپاسگزارم.

تقدیم به

قبلگاه چشمانم

پدر، مادر بزرگوارم و همسر صبورم

و

همه عزیزانی که دعای خیرشان بدرقه راهم بود...

چکیده

قوانین اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی فازی

قضایای حدی برای مجموع هایی از متغیرهای تصادفی فازی در قرن اخیر مورد توجه بسیاری از صاحب نظران قرار گرفته است ،در این پایان نامه ضمن معرفی مجموعه ها،اعداد و متغیرهای تصادفی فازی، قانون ضعیف اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی بطور فشرده محدب بطور یکنواخت انتگرال پذیر فازی در فضایی از مجموعه های نرمال و نیم پیوسته بالایی در R^p با تکیه گاه فشرده تحت متر اسکورکود که توسط جو (۲۰۰۴) مطرح شده را موردتجزیه وتحلیل قرار داد ه ایم.

در فصل چهارم قانون قوی اعداد بزرگ، برای متغیرهای تصادفی مستقل همسطح و هم توزیع همسطح فازی وقانون قوی اعداد بزرگ چانگ برای متغیرهای تصادفی فازی مستقل همسطح که توسط کیم(۲۰۰۰) مطرح شدند ونیز قانون قوی اعداد بزرگ کلموگروف برای متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع همسطح فازی که توسط جو وکیم (۲۰۰۱) اثبات شد، را بررسی نموده ایم.

درفصل پنجم با استفاده از متر $d_{\infty a}$ که در فصل اول معرفی شده ، قوانین فوق را به متغیرهای تصادفی وابسته منفی فازی تعمیم داده ایم.

فهرست مطالب

فصل اول :

مفاهیم مقدماتی و کلیات

در این فصل مفاهیم و قضایای مقدماتی مورد نیاز سایر فصول را ارائه می نماییم. بخش اول اختصاص به مروری بر اصول و مفاهیم اساسی آنالیز دارد. در بخش دوم به اختصار اندازه احتمال و خواص آن را یادآوری می نماییم.

۱.۱ مروری بر مفاهیم اساسی آنالیز ریاضی

در این رساله از نمادهای Q, N, R به ترتیب برای نمایش اعداد حقیقی، اعداد صحیح و مجموعه اعداد گویا استفاده می کنیم مگر آن که خلاف آن به صراحت ذکر گردد.

تعریف۱-۱: یک **ترتیب** بر مجموعه S که با نماد $<$ نمایش داده می شود، رابطه ای است که در دو شرط زیر صدق کند:

۱- هرگاه $x, y \in S$، آن گاه یکی و فقط یکی از گزاره های $x > y, x = y, x < y$ راست است.

۲- هرگاه $x, y, z \in S$، $x < y$ و $y < z$، آن گاه $x < z$.

یک **مجموعه مرتب** مجموعه ای است مانند S که در آن ترتیبی مقرر شده باشد.

تعریف۱-۲: فرض کنید، $E \subset S$ و E از بالا کراندار($\exists \beta \forall x \in E, x \leq \beta$) و عنصری مانند $\alpha \in S$ با خواص زیر وجود داشته باشد:

۱- α یک کران بالایی E باشد،

۲- هرگاه $\gamma < \alpha$، آن گاه γ یک کران بالایی E نباشد،

آن گاه α را کوچکترین کران بالایی E یا **سوپریمم** E نامیده و می نویسیم $\alpha = \sup E$.

بزرگترین کران پایینی یا **اینفیمم**، $\alpha = \inf E$، بطور مشابه تعریف می شود.

در این قسمت تعاریف و قضایای مربوط به توپولوژی که در این رساله به آن احتیاج داریم را به اختصار بیان می کنیم.

تعریف۱-۳: فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. تابع $d : X \times X \to R$ که در سه شرط زیر صدق کند را یک **متر** می نامیم.

۱- $d(p,q) > 0$ هرگاه $p \neq q$ و $d(p,q) = 0$ هرگاه $p = q$

۲- $d(p,q) = d(q,p)$

۳- به ازای هر $r \in X$، $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

مجموعه X به همراه متر d را یک **فضای متری** نامیده آن را به (X,d) نمایش می دهیم.

تعریف۱-۴: فرض کنید X یک فضای متری باشد تمام نقاط و مجموعه های یاد شده در زیر عنصرهاوزیر مجموعه های X فرض می شوند.

۱-یک **همسایگی** نقطه p مجموعه ای است مثل $N_r(p)$ مرکب از تمام نقاطی چون q است که $d(p,q) < r$. عدد r شعاع $N_r(p)$ نامیده می شود.

۲- نقطه p یک **نقطه حدی** مجموعه E است هرگاه هر همسایگی p شامل نقطه ای چون $q \in E$ غیر از p باشد.

۳- E **بسته** است هرگاه هر نقطه حدی E یک نقطه از E باشد.

۴- نقطه p یک **نقطه درونی** E است هرگاه یک همسایگی از p مانند N باشد بطوری که $N \subset E$.

۵- E **باز** است هرگاه هر نقطه E یک نقطه درونی اش باشد.

۶- E **کامل** است هر گاه E بسته و هر نقطه E یک نقطه حدی آن باشد.

۷- E **کراندار** است هرگاه عدد حقیقی چون M و نقطه ای مثل $q \in X$ باشد به طوری که به ازای هر $p \in E$، $d(p,q) < M$.

۸- E در X **چگال** است هرگاه هر نقطه X یک نقطه حدی E یا یک نقطه E (و یا هر دو) باشد.

۹- فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد در این صورت (X,d) تجزیه پذیر است هرگاه شامل یک زیرمجموعه چگال شمارا باشد.

همانگونه که ملاحظه نمودید در فضاهای متری مجموعه باز بر حسب متر تعریف می شوند . در فضاهای توپولوژی هر مجموعه متعلق به توپولوژی یک مجموعه باز است.

تعریف ۱-۵: یک توپولوژی روی مجموعه X، کلاسی مانند τ از زیرمجموعه های X که مجموعه های باز نامیده می شوند ،است که در شرایط زیر صدق کند

۱- هر اجتماع از عنصرهای τ متعلق به τ اند

۲- هر اشتراک متناهی از اعضای τ متعلق به τ اند

۳- X و ϕ متعلق به τ اند

(X,τ) را یک فضای توپولوژیک نامند .

گردایه ای از زیر مجموعه های X، B،را یک پایه توپولوژی در X نامند اگر

۱- به ازای هر $x \in X$ دست کم یک عضو پایه مانند B شامل x موجود باشد

۲- اگر x متعلق به مقطع دو عضو پایه مانند B_1 و B_2 باشد آنگاه عضوی از پایه مانند B_3 وجود داشته باشد بطوری که $x \in B_3$ و $B_3 \subset B_1 \cup B_2$.

اگر B چنین پایه ای باشد کلاس τ را توپولوژی تولید شده به وسیله B نامیم اگر

$$\forall\ U \in \tau\ ,\forall x \in U\ \ \exists B \in \mathrm{B}\quad s.t\quad x \in B\ ,\ B \subseteq U$$

یکی از مهمترین و معمولترین طریقه های ساختن یک توپولوژی در یک مجموعه این است که توپولوژی بر حسب متریکی در آن مجموعه تعریف شود .

توپولوژی تولید شده توسط پایه ها ی $B_d(x,\varepsilon)$، $x \in X$ و $\varepsilon > 0$ که $B_d(x,\varepsilon) = \{y | d(x,y) < \varepsilon\}$ را **توپولوژی متری تولید شده به وسیله** d می نامیم.

تعریف۱-۶ : هرگاه X یک فضای متری و $E \subset X$ و E' مجموعه تمام نقاط حدی E در X باشد آن گاه مجموعه $\overline{E} = E \cup E'$ را **بست** E می نامیم.

قضیه۱-۷: هرگاه X یک فضای متری بوده و $E \subset X$، آنگاه

۱- $\overline{E}$ بسته است،

۲- $E = \overline{E}$ اگر وفقط اگر E بسته باشد،

۳- به ازای هر مجموعه بسته $F \subset X$ که $E \subset F$ داریم $\overline{E} \subset F$.

اثبات این قضیه رامی توانید در صفحه۴۴، [۱] ملاحظه نمایید.

گردایه ای از زیرمجموعه های باز X مانند $\{G_\alpha\}$ به قسمی که $E \subset \underset{\alpha}{\cup} G_\alpha$،را یک **پوشش باز** مجموعه E نامیم. زیر مجموعه E از فضای متری X را **فشرده** می نامیم هرگاه هر پوشش باز E حاوی زیرپوششی متناهی باشد. می توان نشان داد که زیر مجموعه های فشرده فضای متری بسته اند. (صفحه ۴۶ ، [۱] را ببینید).

زیر مجموعه Y در فضای توپولوژیکی X را نسبتا فشرده نامیم اگر بست آن فشرده باشد.

قضیه۱-۸ : هرگاه مجموعه E در R^n یکی از سه خاصیت زیر را داشته باشد آن گاه از دو خاصیت دیگر هم بهره مند است . (صفحه ۵۰ ،[۱] را ملاحظه کنید)

۱- E بسته و کراندار است،

۲- E فشرده است،

۳- هر زیرمجموعه نامتناهی E یک نقطه حدی در E دارد.

متر هاسدروف که متعاقبا تعریف آن را ارائه و برخی از ویژگی های آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم از جمله مترهایی است که به اندازه گیری فاصله بین دو مجموعه می پردازد . زیر مجموعه $E \subset R^p$ را **محدب** می خوانیم اگر برای هر $x \in E$، $y \in E$ و $0 < \lambda < 1$ داشته باشیم ، $\lambda x + (1-\lambda)y \in E$.

تعریف ۱-۹: اگر $K(R^p)$ خانواده ای از زیرمجموعه های فشرده ،محدب و ناتهی از فضای اقلیدسی R^p باشد ، آنگاه متر **ها سدروف**[1] راکه با d_H نشان داده می شود در فضای $K(R^p)$ به صورت زیر تعریف می گردد .

$$d_H(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|a-b|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|a-b|\right\}$$

در این صورت **نرم** $A \in K(R^p)$ عبارتست از:

$$\|A\| = d_H(A,\{0\}) = \sup_{a\in A}|a|.$$

می توان نشان داد که فضای $K(R^p)$ با در نظر گرفتن متر هاسدروف کامل و تجزیه پذیراست.

یک حالت خاص و مهم هنگامی است که A و B دو بازه با مقادیر مثبت باشند ، $A=[w,\beta]$ و $B=[\theta,\eta]$ ، در آن صورت متر هاسدروف به شکل زیر خواهد بود .

$$d_H(A,B) = \max\{|w-\theta|,|\beta-\eta|\}$$

اثبات : حالتی را که $w<\beta<\theta<\eta$ باشد را اثبات می کنیم و باقی حالات به شیوه مشابه اثبات می شود .

بـــــا ثابـــــت نگـــــه داشـــــتن $a \in A$، $\inf_{b\in B}|a-b| = |a-\theta|$ لـــــذا $\sup_{a\in A}|a-\theta| = |w-\theta|$ و همچنین، $\sup_{b\in B}|a-b| = |a-\eta|$ لذا $\inf_{a\in A}|a-\eta| = |\beta-\eta|$ در نتیجه خواهیم داشت

در نتیجه

$$d_H(A,B) = \max\{|w-\theta|,|\beta-\eta|\}$$

[1] Housdorff

لم زیر رفتار حدی دنباله های یکنوا را که متعاقبا معرفی می نماییم تحت متر هاسدورف بیان می کند.

اگر $\{A_n\}$ دنباله ای صعودی باشد ($A_n \subset A_{n+1}$)، آن گاه $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ و اگر $\{A_n\}$ دنباله ای نزولی باشد ($A_n \supset A_{n+1}$) آن گاه $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. دنباله $\{A_n\}$را یکنوا نامیم اگر صعودی یا نزولی باشد.

لم ۱–۱۰[۶] : فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله ای یکنوا در فضای $K(R^p)$ باشد. اگر زیردنباله ای از $\{A_n\}$، همگرا به $A \in K(R^p)$ تحت متر هاسدورف باشد آن گاه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} d_H(A_n, A) = 0$$

که درآن $A = \bigcap\limits_{n\geq 1} \overline{\bigcup\limits_{k\geq n} A_k}$.

یک حالت خاص و مهم دیگر آن است که دو زیرمجموعه A, B از فضای متری X جدا از هم باشند،یعنی $A \cap \overline{B}$ و $\overline{A} \cap B$، تهی باشند . چنین دو زیر مجموعه ای را **تجزیه پذیر** نیز می نامند. اینک علت نامگذاری فضاهای متریک تجزیه پذیر روشن می گردد.

متعاقبا متر دیگری که درتعیین اندازه فاصله بین مجموعه ها بکار می رود را معرفی می نمایم. در واقع متر اسکورکود[۲] فاصله بین برد دو تابع که ممکن است دیگر پیوسته نباشد را اندازه می گیرد .

تعریف۱–۱۱ : فرض کنید (M,d)فضای متریک و $E \subset R$ تابع $u: E \to M$ یک تابع کادلاگ نامیده می شود، اگر برای هر $t \in E$، $f(t+) = \lim\limits_{s\downarrow t} f(s)$ (حد راست) موجود باشد و مساوی $f(t)$ باشد و همچنین $f(t-) = \lim\limits_{s\uparrow t} f(s)$ (حد چپ) موجود باشد.

دراین رساله ، $E = [0,1]$ و $M = R^n$ می باشند.

[۲] Skorokhod

u_1 و u_2 دو تابع کادلاگ و T را مجموعه ای از توابع پیوسته اکیدا صعودی ازبازه $E=[0,1]$ بر روی خودش در نظر بگیرید. متر اسکورکود برای توابع فوق به صورت زیر تعریف می شود .

$$d_s(u_1,u_2)=\inf\left\{\varepsilon>0:\exists t\in T\ s.t\ \sup_{0\le\alpha\le1}\left|t(\alpha)-\alpha\right|\le\varepsilon,\sup_{0\le\alpha\le1}\left|u_1(\alpha)-u_2(t(\alpha))\right|\le\varepsilon\right\}$$

در ادامه برخی از انواع مترهایی که فاصله بین دو مجموعه ، یا کلاسی از مجموعه ها را اندازه گیری می کند به اختصار به همراه مراجع مربوطه معرفی می کنیم.

الف: متر d_a،متر مناسبی برای اندازه گیری فاصله بین دو بازه $A_\alpha=\left[A_\alpha^-,A_\alpha^+\right]$ و $B_\alpha=\left[B_\alpha^-,B_\alpha^+\right]$ می باشد.

$$d_a(A_\alpha,B_\alpha)=(\left|A_\alpha^--B_\alpha^-\right|+\left|A_\alpha^+-B_\alpha^+\right|)$$

ب: مترهای d_∞ و d^* فاصله بین دو کلاس از بازه ها $A=\{A_\alpha;0\le\alpha\le1\},B=\{B_\alpha;0\le\alpha\le1\}$ را اندازه می گیرند این مترها به ترتیب با ضابطه های زیر تعریف می شوند .

$$d_\infty(A,B)=\sup_{0\le\alpha\le1}d_H(A_\alpha,B_\alpha)$$
$$d^*(A,B)=\int_0^1 d_H(A_\alpha,B_\alpha)d\alpha$$

و

$$\|A\|=d_\infty(A,0)=\max(\left|A_\alpha^-\right|,\left|A_\alpha^+\right|)$$

مترهای $d_{\infty a}$ و d_a^* بطور مشابه و با جایگزینی d_a بجای d_H بدست می آیند.در صورتی که α را بصورت یک متغیر تصادفی با توزیع $f(\alpha)$ فرض کنیم متر $d_{f,p}^*$ تعمیمی از متر d^* خواهد بود

$$d_{f,p}^*(A,B)=\int_0^1(d_H(A_\alpha,B_\alpha))^P f(\alpha)d\alpha$$

ج: متر $d_{p,q}(A,B)$ فاصله دو کلاس از بازه ها، $A=\{A_\alpha;0\le\alpha\le1\},B=\{B_\alpha;0\le\alpha\le1\}$ را اندازه می گیرد. این متر به ترتیب با ضابطه های زیر تعریف می شوند .

$$d_{p,q}(A,B)=\begin{cases}[(1-q)\int_0^1\left|A_\alpha^--B_\alpha^-\right|^p d\alpha+q\int_0^1\left|A_\alpha^+-B_\alpha^+\right|^p d\alpha]^{\frac{1}{p}} & if\ p<\infty\\ (1-q)\sup\limits_{0<\alpha\le1}(\left|A_\alpha^--B_\alpha^-\right|)+q\inf\limits_{0<\alpha\le1}(\left|A_\alpha^+-B_\alpha^+\right|) & if\ p=\infty\end{cases}$$

این متر توسط صادقپور و گین(۲۰۰۱) معرفی شد.

د: در متر فوق با تعویض توزیع یکنواخت با تابع چگالی $f(\alpha)$ متر تعمیم یافته $d^{a}_{p,q}$ بصورت زیر حاصل می گردد

$$d^{a}_{p,q}(A,B)=\begin{cases}[(1-q)\int_0^1\left|A^-_\alpha-B^-_\alpha\right|^p f(\alpha)d\alpha+q\int_0^1\left|A^+_\alpha-B^+_\alpha\right|^p f(\alpha)d\alpha]^{\frac{1}{p}} & if\ p<\infty\\ (1-q)\sup\limits_{0<\alpha\le 1}(\left|A^-_\alpha-B^-_\alpha\right|)+q\inf\limits_{0<\alpha\le 1}(\left|A^+_\alpha-B^+_\alpha\right|) & if\ p=\infty\end{cases}$$

به اختصار می توان رابطه بین مترها ی مختلف را به شرح زیر بیان نمود که این روابط نشان دهنده قدرت یک متر نسبت به متر دیگری است.

$$d_H(A,B)<d_a(A,B)\quad,\quad d^*(A,B)<d^*_a(A,B)\qquad\qquad d^*(A,B)<d_\infty(A,B)$$
$$d_\infty(A,B)<d_{\infty a}(A,B)\quad,\quad d^*_a(A,B)<d_{\infty A}(A,B)$$

متعاقبا مفهوم پیوستگی را در دوحالت ، اول بر روی فضاهای متریک و سپس بر روی فضاهای توپولوژی تعریف می کنیم .فرض می کنیم خواننده با مفهوم حد توابع و دنباله ها آشنایی دارد .

تعریف ۱–۱۲: فرض کنید X,Y فضاهای متری با مترهای d_Y و d_X و f نگاشتی از X بتوی Y باشد در این صورت f را در نقطه p، **پیوسته** نامند هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ ، $\delta>0$ ای باشد به قسمی که

$$d_X(x,p)<\delta\Rightarrow d_Y(f(x),f(p))<\in \qquad ۱۰۱۰۱$$

اگر رابطه(۱) برای هر p برقرار باشد در آن صورت گوییم ، نگاشت f به **طور یکنواخت پیوسته** می باشد.

هرچند توابع پیوسته بسیار مفید می باشند با این وجود رده بزرگی از توابع هستند که در یک یا چند یا تعدادی نقاط ناپیوسته هستند . توابع ناپیوسته در یک نقطه را می توان به دو دسته تقسیم نمود ، توابعی که ناپیوستگی آنها رفع شدنی می باشد و توابعی که ناپیوستگی آنها رفع نشدنی است. به عنوان مثال ناپیوستگی تابع $x\neq 0$, $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ در نقطه $x=0$ رفع شدنی است . برای بررسی بیشتر توابع نوع دوم مفهوم نیم پیوسته بالایی و پایینی را ارائه می دهیم .

تعریف ۱–۱۳: تابع f را در نقطه x_0 **نیم پیوسته بالایی** نامیم اگر [۳] $\overline{\lim}_{x \to x_0} f(x) \le f(x_0)$ یعنی f در نقطه x_0 نیم پیوسته بالایی است اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوری که برای $|x - x_0| < \delta$، $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. f را **نیم پیوسته پایینی** نامیم اگر $\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) \ge f(x_0)$.

بدیهی است که اگر تابع نیم پیوسته بالایی (یا پایینی) باشد الزامی ندارد که حد آن موجود باشد با این وجود به سهولت می توان نشان داد که تابع در یک نقطه پیوسته است اگر و تنها اگر نیم پیوسته پایینی و بالایی باشد.

مفهوم پیوستگی در فضاهای متریک بر حسب متر بیان می شوند . این مفهوم در فضاهای توپولوژیکی بر مبنای مجموعه های باز تعریف می گردد .

تعریف ۱–۱۴: اگر X,Y دو فضای توپولوژی و $f: X \to Y$، آن گاه f در نقطه $x_0 \in X$ پیوسته است اگر برای هر همسایگی V (مجموعه ای که یک مجموعه باز مانند O شامل x_0 را در بر داشته باشد) از $f(x_0)$ در Y، همسایگی U از x_0 در X وجود داشته باشد بطوری که $f(U) \subset V$.

مفهوم نیم پیوستگی را نیز در فضای توپولوژیکی به شیوه مشابه ای ارائه می دهیم .

تعریف۱–۱۵: گوییم تابع $f: X \to R$ ، نیم پیوسته بالایی است اگر برای هر $a \in R$، $f^{-1}(-\infty, a)$ در X باز باشد . نیم پیوسته پایینی به طور مشابه تعریف می شود .

قضیه حد مرکزی و سایر قوانین حدی ، نمونه هایی از همگرایی دنباله های تصادفی می باشند مروری بر مفاهیم دنباله ها و همگرایی آنها پیش نیازی بر قوانین حدی دنباله های تصادفی فازی خواهد بود.

تعریف۱–۱۶: دنباله $\{p_n\}$ در فضای متری X را به $p \in X$ همگرا نامیم اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، $n_0 \in N$ موجود باشد طوری که برای هر $n \ge n_0$، $d(p_n, p) < \varepsilon$ و می نویسیم $p_n \to p$، یا $\lim_{n \to \infty} p_n = p$.

---

[۳] حد بالا - $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ و حد پایین به طریق مشابه تعریف می شود

این سوال طبیعی است که در چه فضاهایی دنباله ها همگرا می باشند . می توان نشان داد که اگر $\{p_n\}$دنباله ای در فضای فشرده X و یا دنباله ای کراندار در R^n باشد آن گاه زیردنباله ای همگرا دارد.

در تعریف زیر نوع دیگری از همگرایی ارائه می شود در این تعریف مقدار حد بطور وضوح مشخص نمی باشد .

تعریف۱-۱۷: دنباله $\{X_n\}$ درفضای متری X یک **دنباله کوشی** نامیده می شود هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $n_0 \in N$ وجود داشته باشد بطوری که برای هر $m,n > n_0$ ، $d(X_n, X_m) <\in$.

فضای متریک (X,d) **کامل** است هرگاه هر دنباله کوشی در Xبه نقطه ای در Xهمگرا باشد .

قضیه زیرارتباط بین مفاهیم همگرایی و دنباله های کوشی را نشان می دهد.(صفحه ۶۷ [۱] را ببینید).

قضیه۱-۱۸:

۱- در هر فضای متری X، هر دنباله همگرا یک دنباله کوشی است .

۲- هرگاه X یک فضای متری فشرده و $\{p_n\}$ یک دنباله کوشی در آن باشد ، آن گاه $\{p_n\}$به نقطه ای در X همگراست .

۳- در R^k، هر دنباله کوشی همگراست .

همگرایی دنباله توابع به شیوه مناسب تعریف می گردد.

تعریف۱-۱۹: فرض کنید $\{f_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از توابع باشد که بر مجموعه E تعریف شده اند دنباله $\{f_n\}$بر E **نقطه به نقطه به** f **همگراست** اگر به ازای هر x دنباله $f_n(x)$ به $f(x)$ همگرا باشد.

هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، $n \in N$ موجود باشد بطوری که برای هر $n \geq N$ و $x \in E$، $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ آن گاه گوییم $\{f_n\}$ به **طور یکنواخت** به f همگراست.

لم ۱–۲۰: فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع یکنوا بر بازه $[0,1]$باشد،اگر $f_n(x)$ به تابع پیوسته $f(x)$ بر بازه $[0,1]$ نقطه به نقطه همگرا باشد،آن گاه $f_n(x)$ به $f(x)$ به طور یکنواخت همگراست

اثبات : چون f_n یکنواست و همچنین f_n نقطه به نقطه به تابع پیوسته f همگراست پس f نیز یکنواست و بر بازه فشرده $I=[0,1]$ پیوسته یکنواخت است(قضیه۳,۲۳ از[۱۰] را ببینید)اگر بازه $[0,1]$ را به بازه های متناهی بصورت $0=x_0<x_1<\ldots<x_j<\ldots.<x_h=1$ ، که $j=0,1,\ldots h$ تقسیم کنیم چون f پیوسته یکنواخت است پس

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta \quad \forall x_j, x_{j-1},\ |x_j-x_{j-1}|<\delta \Rightarrow |f(x_j)-f(x_{j-1})|<\varepsilon$$

چون f_n به f نقطه به نقطه همگراست پس

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_j \ s.t \quad \forall n\ge n_j \ \Rightarrow \ |f(x_j)-f_n(x_j)|<\varepsilon$$

با توجه به پیوستگی f بر بازه I داریم

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta \ \ \forall x\in I \ \ ,\ |x-x_j|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_j)|<\varepsilon$$

اگر $N=\sup\{(n_0,\ldots,n_h)\}$ آنگاه

$$\forall\varepsilon>0 \ \ \forall n\ge N \ ,|x-x_j|<\delta \ \ ,1\le j\le h \ \Rightarrow |f(x_j)-f_n(x)|<\varepsilon$$

بنابراین

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_n(x_j)| &= |f_n(x)-f(x_j)+f(x_j)-f_n(x_j)|\\ &\le |f_n(x)-f(x_j)|+|f(x_j)-f_n(x_j)|\\ &\le \varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)| &= |f_n(x)-f_n(x_j)+f_n(x_j)-f(x_j)+f(x_j)-f(x)|\\ &\le |f_n(x)-f_n(x_j)|+|f_n(x_j)-f(x_j)|+|f(x_j)-f(x)|\\ &\le \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon\end{aligned}$$

لذا $f_n\to f$ روی بازه I به طور یکنواخت همگراست .

در لم بالا پیوستگی حد تابع f ضروری است .برای مثال اگر $f_n(x)=x^n$ و $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$ آن گاه تابع $f_n(x)$ یکنواست و به $f(x)$ نقطه به نقطه همگراست اما $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=1$.

آخرین مبحث این بخش به را به مجموعه ها و توابع اندازه پذیر لبگ و معرفی برخی از خواص آنان اختصاص داده ایم .

اگر $\{A_n\}$ دنباله ای از بازه ها برروی خط اعداد حقیقی و پوششی برای مجموعه A باشد مقدار $m^*(A)=\inf\sum l(A_n)$ که در آن $l(A_n)$ معرف طول بازه A_n است را اندازه خارجی لبگ A نامیم.

تعریف ۱–۲۱: مجموعه E لبگ اندازه پذیر است اگر برای هر مجموعه A داشته باشیم

$$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap\overline{E})$$

با استفاده از مفهوم مجموعه های اندازه پذیر توابع اندازه پذیر بصورت زیر تعریف می شوند.

تابع حقیقی مقدار f تعریف شده بر روی مجموعه اندازه پذیر E،اندازه پذیرلبگ است اگر برای هر $\alpha\in R$، مجموعه $[x:f(x)>\alpha]$اندازه پذیر باشد .

اگر m یک اندازه و φ یک تابع ساده اندازه پذیر باشد مقدار $\int\varphi dx=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i m(A_i)$ را انتگرال φ نامند .

تعریف۱–۲۲: برای هرتابع اندازه پذیر نامنفی f، انتگرال لبگ f بصورت $\int fdx=\sup\limits_{\varphi\le f}\int\varphi(x)dx$ تعریف می شود .

برای هر مجموعه اندازه پذیر E، مقدار $\int_E fdx=\int f\chi_E dx$ انتگرال لبگ بر روی مجموعه E نامیده می شود.در تعریف فوق χ تابع نشانگر E خواهد بود.

برای هر تابع f ، انتگرال لبگ f بصورت $\int f^{+}dx - \int f^{-}dx$ = $\int fdx$ ،که در آن $f^{+} = \max(f,0)$ و $f^{-} = \min(0,f)$ می باشد،نشان می دهیم.

به اختصار برخی از خواص انتگرال های لبگ را بیان می کنیم.

الف: اگر $\{f_n\}$دنباله ای از توابع انتگرال پذیرباشد که $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| dx < \infty$ ، آن گاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ به مجموعش ، $f(x)$ ،همگراست و $\int fdx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n dx$.

ب: قضیه همگرایی تسلطی لبگ : فرض کنیم $\{f_n\}$دنباله ای از توابع اندازه پذیرباشند که به تابع انتگرال پذیر g کراندار باشند(یعنی $(n=1,2,\ldots,x \in E)$ $|f_n(x)| \le g(x)$)بقسمی که $f_n(x) \to f(x)$ $(x \in E)$ آن گاه $\int_E fdx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n dx$.

ج: قضیه همگرایی یکنوایی لبگ: قضیه فوق برای دنباله توابع اندازه پذیر نامنفی و نانزولی $\{f_n\}$ برقرار می باشد یعنی $(n \to \infty)$ $\int_E f_n dx \to \int_E fdx$.

برای مطالعه اثبات قضیه های فوق و سایر خواص خوانندگان علاقمند را به رودین ۱۳۸۴ارجاع می دهیم.

۲۰۱ برخی از مفاهیم ونکات اساسی احتمال:

همانگونه که مطلع می باشید هر کدام از تعاریف اول و دوم احتمال ، تعریف احتمال برای پیشامدهای هم شانس و تعریف احتمال به عنوان حد فروانی نسبی، دارای اشکالات منطقی می باشند این موضوع سبب شد تا کلموگروف ، احتمال را به شیوه اصل موضوع تعریف نماید . برای این منظور لازم است ابتدا پیشامدها را به شکل مستدل تری معرفی کنیم .