دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض

فضاهای متریک تابع‌مقدار

استاد راهنما

دکتر مجید میرزاوزیری

استاد مشاور

دکتر محمد صال مصلحیان

نگارنده

سجاد احراری

بهمن ۱۳۹۱

پیش‌گفتار

منطق فازی یک فرا مجموعه است که بر مفهوم درستی نسبی دلالت دارد. منطق کلاسیک هر چیزی را بر اساس یک سیستم دوتایی نشان می‌دهد (درست یا غلط، ۰ یا ۱ ، سیاه یا سفید) ولی منطق فازی درستی هر چیزی را با یک عدد که مقدار آن بین صفر و یک است نشان می‌دهد. مثلاً اگر رنگ سیاه را با عدد صفر و رنگ سفید را با عدد یک نشان دهیم، آنگاه رنگ خاکستری عددی نزدیک به صفر خواهد بود.

نظریه فازی اولین بار توسط پروفسور لطفی عسگرزاده[۱] در سال ۱۹۶۵ در مقاله‌ای به نام ”مجموعه های فازی“ معرفی گردید. اگر بخواهیم نظریه‌ی مجموعه‌های فازی را تعریف کنیم، باید بگوییم که نظریه‌ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم هایی را که نادقیق هستند، صورت بندی ریاضی بخشید و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد.

دنیای واقعی ما بسیار پیچیده تر از آن است که بتوان یک توصیف و تعریف دقیق برای آن بدست آورد، بنابراین باید برای یک مدل، توصیفی تقریبی یا همان فازی که قابل قبول و قابل تجزیه و تحلیل باشد، معرفی شود.

روش های کلاسیک و سنتی مدل سازی، استدلال، استنتاج، و محاسبات دارای ویژگی دو ارزشی بله

[۱] Lotfi Asgar Zadeh

یا خیر و سفید یا سیاه‌اند. لیکن در جهان خارج و اقلیم واقعیات ترسیم مرزهای روشن و شفاف بین پدیده‌ها و روابط کاری بسیار سخت و طاقت فرسا بوده و در بسیاری از موارد، قضاوت صریح و بدون ابهام غیر ممکن است. در نظریه فازی علیرغم روشهای سنتی، مرزهای مجموعه ها صریح و شفاف نبوده و پایه‌ی قضاوت ها واژه هایی نظیر کم و بیش است. به عبارت دیگر، در سیستم های فازی نوع مدل سازی و استدلال تقریبی بوده و در مجموعه‌های فازی تابعیت هر عنصر در یک مجموعه بر حسب درجه‌ی عضویت آن در مجموعه‌ی مذکور است. این دیدگاه پایه و اساس مجموعه‌های فازی می‌باشد.
فضای متریک احتمالی، تعمیمی فازی از فضاهای متریک است که در آن فاصله همان چیزی است که روی اعداد حقیقی مثبت تعریف می‌شود با این تفاوت که توابع توزیع به عنوان مقادیر آن بکار می‌روند. برای اطلاعات بیشتر در مورد محاسبات روی فضاهای متریک احتمالی به [۱۵] مراجعه شود.
نظریه نرم فازی روی فضاهای برداری ابتدا در سال ۱۹۸۴ توسط کاتسارس [۱] در [۷] ارائه شد. همچنین فلبین [۲] در [۴] یک نرم فازی تعریف کرد که به هر یک از عناصر فضای برداری یک عدد فازی مثبت اختصاص می‌داد. نرم فازی او منطبق بر متر فازی کالوا [۳] و سیکالا [۴] [۶] بود. در پی آن در سال ۱۹۹۴ چنگ [۵] و مردسون [۶] در [۳] نوع پیشرفته تری از نرم فازی را ارائه کردند که منطبق بر متر فازی کراموسیل [۷] و میچلک [۸] [۹] بود. همه‌ی این تعاریف می‌توانند به عنوان نرم های تابع مقدار در نظر گرفته شوند.
بگ [۹] و سامانتا [۱۰] در [۱] یک نوع نرم فازی به دست دادند که تفاوت اندکی با نرم فازی چنگ و مردسون داشت و نرم مناسبی برای اثبات قضایایی اساسی در آنالیز تابعی، همچون قضیه هان باناخ و قضیه اصل کرانداری یکنواخت بود. بنابراین چند گونه نرم فازی توسط محققان ارائه شده است که بگ و سامانتا در [۲] آنها را به دو نوع کلی کاتسارس و فلبین تقسیم کردند.

---

[۱] Katsaras [۲] Felbin [۳] Kaleva [۴] Seikkala [۵] Cheng [۶] Merdeson [۷] kramosil [۸] Michelek [۹] Bag [۱۰] Samanta

خواننده را برای اطلاعات بیشتر روی $C^\star$-مدول های هیلبرت؛ به منابع [۳]، [۷] و [۹] ارجاع می‌دهیم. نقطه نظر کار کردن با ضرب های داخلی A-مقداری به جای $\mathbb{C}$-مقداری، ما را برمی‌انگیزد تا روی متریک های A-مقداری روی مجموعه‌ها کار کنیم. برای تعریف مفهوم F-متریک روی مجموعه‌ی X به عنوان نگاشتی از $X \times X$ به توی مخروط مثبت A^+ از $C^\star$-جبر A، از تعریف متر معمولی و همچنین تعریف $C^\star$-مدول هیلبرت استفاده می‌کنیم.

این پایان نامه شامل سه فصل است.

فصل اول شامل چهار بخش است. بخش اول به مفاهیم مقدماتی از آنالیز مقدماتی می‌پردازیم که در طول پایان نامه به کار رفته‌اند. در بخش دوم به بیان تعریف و قضایایی از مبحث توپولوژی می‌پردازیم که از آنها غالباً در فصل سوم استفاده می‌شود. در بخش سوم به بیان تعاریف و مفاهیمی از آنالیز حقیقی می‌پردازیم که ابتدا مفاهیم حلقه، جبر، جبر باناخ ، C^*-جبر را تعریف کرده و سپس براساس آن A-مدول پیش هیلبرت راست را تعریف می‌کنیم و به بیان چند قضیه و گزاره پیرامون آن می‌پردازیم. در بخش چهارم مجموعه‌ی فازی، مجموعه‌ی α-برش ها را تعریف می‌کنیم. همچنین مفهوم عدد فازی، عدد فازی مثبت و اعمال ریاضی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد فازی را تعریف و روابط مرتب جزیی، $\succeq$ و $\succ$ را برای مقایسه و شناخت و درک کامل‌تری از فضای اعداد حقیقی فازی ارائه می‌کنیم.

فصل دوم شامل دو بخش است و به ترتیب برگرفته از دو مقاله

T. Bag, S.K. Samanta, Finite dimensional fuzzy normed linear spaces, J. Fuzzy Math. 11 (3) (2003), 687-705.

A. Hasankhani, A. Nazari and M. Saheli, Some properties of fuzzy Hilbert spaces and norm of operators , Iranian Journal of Fuzzy Systems, Vol. 7(3) (2010) 129-157.

است. در بخش اول نمونه ای از نرم فازی کاتسارس به همراه یک مثال آورده شده است. همچنین در بخش دوم نمونه‌ای از نرم فازی نوع فلبین ارائه شده است.
فصل سوم شامل شش بخش است که بر گرفته از مقاله

M. Mirzavaziri, Function Valued Metric Spases, Surveys in Mathematics and its Applications, 1843-7265 (print) Vol (2010), 321 – 332

است در بخش اول به مروری مختصر بر فضای A می‌پردازیم و تنها به چند گزاره‌ی ساده در این باب اکتفا می‌کنیم. همچنین به همراه تعریف یک عنصر مثبت از A، محک مناسبی را ارائه می‌دهیم که می‌توان آن را به عنوان خاصیت $C^\star$-ارشمیدسی در نظر گرفت و در انتهای فصل فضای $C^{۱/۲}(\Omega)$ را معرفی می‌کنیم. در بخش دوم به معرفی و آشنایی با مفهوم F-متریک به عنوان یک نگاشت فاصله ای تابع مقدار، روی مجموعه‌ی X می‌پردازیم و در ادامه نیز به تحقیق و بررسی در قضایای F-متریک به منظور مقایسه این فضا با فضاهای متریک و همچنین بیان ویژگی های این فضاها خواهیم پرداخت. در بخش سوم مجموعه‌ی مجاز را تعریف می‌کنیم و بر پایه‌ی آن به بررسی ویژگی هایی از فضای F-متریک می‌پردازیم. در بخش چهارم به تمایز بین دو فضای متریک و F-متریک می‌پردازیم و در واقع نشان می‌دهیم که هر فضای متریک را می‌توان به عنوان یک فضای F-متریک و هر فضای F-متریک (X, δ) را به عنوان یک فضای توپولوژیک (X, τ_δ) در نظر گرفت. همین طور اثبات می‌کنیم که رسته‌ی فضاهای F- متریک توسیع یافته، اکیداً شامل رسته‌ی فضاهای متریک است.
بخش پنجم را با تعریف فضای F-کامل آغاز کرده، سپس به معرفی فضای $\overline{F}$-متریک می‌پردازیم که در واقع منظور از آن تتمیم فضای F-متریک است. همچنین در ادامه قضایایی را مورد بررسی قرار

می‌دهیم که مشابه آنها در فضاهای متریک یافت می‌شود. در بخش ششم به عنوان کاربردی از مفهوم F-متر، به اثبات این که هر فضای توپولوژیکی نرمال، $\overline{F}$-متریک پذیر است، می‌پردازیم که البته قبل از آن اثبات می‌کنیم که هر فضای $\overline{F}$-متریک R-توسیع یافته، هاسدورف است.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیشنیازها

در بخش اول این فصل، تعاریف و قضایایی در فضاهای نرمدار معمولی که در فصول آینده مورد نیاز است ارائه شده، همچنین در بخش دوم و سوم تعاریف و قضایایی در مورد اعداد فازی ارائه خواهد شد که نه تنها در فصول آینده بلکه، در اکثر رسالاتی که در مورد اعداد فازی است، مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۱.۱ مفاهیمی از آنالیز مقدماتی

در این بخش قضایایی از آنالیز مقدماتی و توپولوژی، که در فضاهای نرمدار معمولی که در فصول آینده مورد نیاز است ارائه شده است.

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد. تابع $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ را یک متر گوییم، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$،

الف) $d(x,y)=0 \iff x=y$

ب) $d(x,y)=d(y,x)$

ج) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

در این وضعیت (X,d) را یک فضای متریک گویند.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک باشد و $\varnothing\neq Y\subseteq X$. اگر d را روی Y تحدید کنیم و آن را $\tilde{d}$ بنامیم، آنگاه به وضوح $\tilde{d}$ کلیه شرایط متر d را دارد. در این صورت $\tilde{d}$ روی Y را متر القایی[۱] و فضای $(Y,\tilde{d})$ را زیرفضای القایی[۲] X می‌نامیم.

تعریف ۳.۱. یک رابطه مانند $\leq$ روی یک مجموعه مانند Λ، ترتیب جزئی[۳] نامیده می‌شود هرگاه منعکس، متعدی، و پادمتقارن باشد. در این حالت $(\Lambda,\leq)$ را یک مجموعه به طور جزئی مرتب[۴] می نامیم. این مجموعه از بالا (پایین) جهتدار[۵] نامیده می‌شود هرگاه هر زیرمجموعه دو عضوی آن تحت رابطه $\leq$ از بالا (پایین) کراندار باشد. Λ را یک مجموعه جهتدار نامیم هرگاه هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد.

تعریف ۴.۱. فرض کنیم $(\Lambda,\leq)$ مجموعه ای جهتدار و X مجموعه ای دلخواه باشد. در این صورت هر خانواده‌ی اندیس دار مانند $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ از عناصر X که توسط مجموعه‌ی Λ اندیس گذاری شده باشد، یک تور[۶] در X اندیس گذاری شده یا جهتدار شده به وسیله‌ی Λ می نامیم.

تعریف ۵.۱. فرض کنیم $f:(X,d)\longrightarrow(\mathbb{R},|.|)$ یک تابع باشد. در این صورت f در $a\in X$، نیم پیوسته از بالا[۷] است اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta>0$ موجود باشد به طوری که به

---

[۱]indused metric [۲]indused metric subspace [۳]partial ordering [۴]partialy ordered set
[۵]upward(downward) directed [۶]net [۷]upper semi continuous

ازای هر $x \in X$، اگر $d(x,a) < \delta$ آنگاه $f(x) < f(a) + \varepsilon$. به طور مشابه می توان تعریف زیر را ارائه کرد:

تعریف ۶.۱. فرض کنیم $f : (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ یک تابع باشد. در این صورت f در $a \in X$، نیم پیوسته از پایین[۱] است اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$، اگر $d(x,a) < \delta$ آنگاه $f(a) - \varepsilon < f(x)$.

نتیجه ۱.۱. فرض کنیم $f : (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ یک تابع باشد. در این صورت f در $a \in A$، نیم پیوسته از بالا و پایین است اگر و فقط اگر در a پیوسته باشد.

ملاحظه می‌کنیم که پیوستگی، نیم پیوستگی از بالا و پایین را نتیجه می‌دهد. اما نیم پیوستگی از بالا (پایین) به تنهایی پیوستگی را نتیجه نمی‌دهد. این مسئله را می‌توان با یک مثال ساده نشان داد.

تعریف ۷.۱. فرض کنیم (X,d) فضایی غیر تام باشد. فضای متریک $(\tilde{X}.\tilde{d})$ را یک تتمیم[۲] فضای (X,d) نامیم هر گاه $(\tilde{X},\tilde{d})$ فضایی تام باشد که X در آن چگال است.

۲.۱ مفاهیمی از توپولوژی

تعریف ۸.۱. یک توپولوژی[۳] در مجموعه‌ی X، گردآیه ای مانند τ از زیرمجموعه های X است که در شرایط زیر صدق می کنند:

الف) $\emptyset$ و X متعلق به τ هستند؛

ب) اجتماع اعضای هر زیرگردایه‌ی τ متعلق به τ است؛

---

۱ lower semi continuous ۲ completion ۳ topology

ج) اشتراک اعضای هر زیرگردایه‌ی متناهی τ متعلق به τ است.

مجموعه‌ی X را که برای آن توپولوژی‌ای مانند τ مشخص شده است، فضای توپولوژیک[۱] (X,τ) می نامیم.

مثال ۱.۱. اگر X مجموعه‌ی دلخواهی باشد گردایه‌ی همه زیرمجموعه های آن تشکیل توپولوژی‌ای در X می دهند که به توپولوژی گسسته[۲] موسوم است.

تعریف ۱.۹. تکیه گاه[۳] تابع f روی فضای توپولوژیکی X بستار مجموعه‌ی $\{x : f(x) \neq 0\}$ است.

تعریف ۱.۱۰. اگر (X,d) فضای متریک باشد، $\tau_d = \{G \subseteq X : \text{باز است} G\}$ توپولوژی القا شده[۴] توسط متر d نامیده می شود.

بنا به تعریف بالا نتیجه می گیریم که هر فضای متریک یک فضای توپولوژیکی است.

تعریف ۱.۱۱. توپولوژی القا شده توسط متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ را توپولوژی اقلیدسی می نامیم و با τ_d نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۲. اگر B گردایه‌ی همه بازه‌های نیم باز اعداد حقیقی به صورت $(a,b] = \{x : a < x \leq b\}$ باشد که $a < b$، آنگاه توپولوژی تولید شده توسط B را توپولوژی حد بالا[۵] در $\mathbb{R}$ می نامیم.

تعریف ۱.۱۳. اگر B گردایه‌ی همه بازه‌های نیم باز اعداد حقیقی به صورت $[a,b) = \{x : a \leq x < b\}$ باشد که $a < b$، آنگاه توپولوژی تولید شده توسط B را توپولوژی حد پایین [۶] در $\mathbb{R}$ می نامیم.

تعریف ۱.۱۴. فرض کنیم τ و τ' دو توپولوژی روی X باشند.اگر $\tau \subseteq \tau'$ می گوییم τ' از τ ظریفتر[۷] است. اگر τ' اکیدا حاوی τ باشد می گوییم τ' اکیدا ظریف تر از τ است.

[۱]Topological Space [۲]discret topology [۳]support [۴]indused topology [۵]upper limit topology
[۶]lower limit topology [۷]finer

همین طور با علائم بالا می گوییم τ از τ' ضعیف تر[۱] است و در حالت دوم اکیدا ضعیف تر است.

تعریف ۱.۱۵. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، X را متریک پذیر[۲] گوییم هر گاه متری مانند d در X موجود باشد به طوری که توپولوژی X را القا کند.

تعریف ۱.۱۶. فرض کنیم (X, d) فضایی متریک باشد. خانوادهی $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از زیرمجموعههای باز X را یک پایه[۳] برای X می نامیم هر گاه به ازای هر $x \in X$ و هر زیرمجموعهی باز شامل x مانند G، عضوی از I مانند $\alpha_\circ$ موجود باشد به قسمی که $x \in G_{\alpha_\circ} \subseteq G$.

تعریف ۱.۱۷. $S \subseteq \tau$ را یک زیرپایه[۴] برای فضای توپولوژیکی (X, τ) گوییم هر گاه اشتراکهای متناهی اعضای S تشکیل یک پایه برای (X, τ) دهند.

تعریف ۱.۱۸. هر تابع یک به یک، برو، پیوسته و باز مانند $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ یک همسانریختی[۵] نامیده میشود. اگر بین (X, d_1) و (Y, d_2) یک همسانریختی موجود باشد آنگاه این دو فضا را همسانریخت مینامیم.

تعاریف و قضایای بعدی مقدمات ورود به فضای حاصلضربی را فراهم میکند.

تعریف ۱.۱۹. فرض کنیم $\Pi_\beta : \Pi_{\alpha \in J} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ تابعی باشد که به هر عضو از فضای حاصلضربی، مختص βام آن را نظیر کند، یعنی $\Pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta$ در اینصورت این تابع را نگاشت تصویری[۶] نظیر اندیس β مینامیم.

تعریف ۱.۲۰. فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانوادهای از مجموعه ها باشد به طوری که

$$\Pi_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \longrightarrow \cup_{\alpha \in I} X_\alpha | f(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha\}$$

[۱] weaker [۲] metrizable [۳] base [۴] subbase [۵] homeomorphism [۶] projection

اگر همه‌ی X_αها ناتهی باشند، بنا به اصل انتخاب $\Pi_\alpha X_\alpha \neq \emptyset$. نگاشت تصویر را به صورت

$$\begin{cases} \Pi_\beta \,:\, \Pi_\alpha X_\alpha \longrightarrow X_\beta \\ \\ \Pi_\beta((x_\alpha)) = x_\beta \end{cases}$$

تعریف می کنیم. توپولوژی القا شده توسط Π_βها روی $\Pi_\alpha X_\alpha$ (در صورتی که $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in I}$ فضاهای توپولوژیک باشند) را توپولوژی تیخونوف یا حاصلضربی[1] می نامیم.

فضاهای متریک ویژگی های جالب و متفاوتی دارند که باعث تمایز آنها از یکدیگر می شوند. از جمله آنها چند خواص زیر است که به جهت استفاده‌ی فراوان از آنها در اینجا، تنها به ذکر آنها و یادآوری چند قضیه زیر اکتفا می کنیم.

تعریف ۲۱.۱. اگر به ازای هر دو نقطه‌ی متمایز x و y از X، مجموعه های باز جدا از همی به ترتیب شامل x و y موجود باشند آنگاه فضای X را هاسدورف[2] می نامیم.

قضیه ۱.۱. هر فضای متریک (X, d) هاسدورف است.

قضیه ۲.۱. اگر (X, τ) فضایی هاسدورف باشد و $A \subseteq X$ آنگاه $(A, \tau|_A)$ نیز هاسدورف است.

قضیه ۳.۱. اگر $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}$ خانواده‌ای از فضاهای هاسدورف باشد آنگاه $\Pi_{\alpha\in I}(X_\alpha, \tau_\alpha)$ نیز هاسدورف است.

قضیه ۴.۱. فضای X را نرمال[3] گوییم هر گاه به ازای هر دو مجموعه‌ی بسته‌ی جدا از هم آن مانند A و B، مجموعه های باز جدا از همی به ترتیب حاوی A و B موجود باشند.

قضیه ۵.۱. هر فضای متریک پذیر (X, d)، فضایی نرمال است.

[1] product topology [2] Hausdorf [3] Normal

قضیه ۶.۱. هر فضای هاسدورف فشرده، فضایی نرمال است.

قضیه ۷.۱. (لم اوریسون)[۱] :شرط لازم و کافی برای آن که فضای توپولوژیکی (X,τ) نرمال باشد آن است که برای هر دو مجموعه‌ی بسته و مجزای $F_۱$ و $F_۲$ تابعی پیوسته مانند $f:(X,\tau)\to([۰,۱],\tau|_{[۰,۱]})$ موجود باشد به طوری که $f(F_۱)=\{۰\}$ و $f(F_۲)=\{۱\}$.

قضیه ۸.۱. (قضیه تیخونوف)[۲] : هر حاصلضرب دلخواه از فضاهای فشرده، با توپولوژی حاصلضربی، فشرده است.

تعریف ۲۲.۱. فرض کنیم Y مجموعه ای دلخواه و F خانواده‌ی تمام توابع $f: X_f \longrightarrow Y$ باشد.اگر هر X_f دارای توپولوژی τ_f باشد در این صورت قوی ترین توپولوژی روی Y که تحت آن تمام توابع در F پیوسته می شوند، توپولوژی نهایی[۳] نامیده می شود و شامل مجموعه های زیر است:

$$\{G \subseteq Y \ : \forall f \in F\,,\ f^{-۱}(G) \in \tau_F\}$$

تعریف ۲۳.۱. نقطه ای مانند x از مجموعه‌ی X و مجموعه‌ی بازی مانند U در فضای Y داده شده است. قرار می دهیم

$$S(x,U)=\{f: f\in Y^X, f(x)\in U\}$$

مجموعه های به صورت $S(x,U)$ تشکیل زیرپایه ای برای توپولوژی بر Y^X می‌دهد. این توپولوژی را را توپولوژی همگرایی نقطه ای[۴] می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۱. فرض کنید (Y,d) یک فضای متریک و X یک فضای توپولوژیکی باشد. عضوی مانند f از Y^X، زیرمجموعه فشرده ای مانند C در X و عدد مثبتی مانند ε مفروض است. فرض کنیم

[۱]Urisohn’s lemma [۲]Tikhonov [۳]final topology [۴]pointwise convergence topology

$B_C(f,\varepsilon)$ نمایش همه اعضایی مانند g از Y^X باشند که به ازای آنها

$$inf\{d(f(x),g(x)) : x \in C\} < \varepsilon.$$

مجموعه‌های $B_C(f,\varepsilon)$ تشکیل یک پایه برای توپولوژی بر Y^X می‌دهند. این توپولوژی، توپولوژی همگرایی یکنواخت[1] بر مجموعه‌های فشرده نامیده می‌شود.

احکامی که در زیر به آنها اشاره خواهیم کرد بیشتر در مباحث پیشرفته تر آنالیز مطرح میشوند. البته سعی شده آن چه را که برای درک بهتر نیاز است آورده شود.

۳.۱ مفاهیمی از آنالیز حقیقی

تعریف ۲۵.۱. یک فضای برداری[2] مجموعه ای چون V است که دارای دو عمل جمع و ضرب اسکالر است که توسط خواص آشنای جبری زیر تعریف می‌شوند:

الف) برای هر $x,y \in V$، $x+y=y+x$؛

ب) برای هر $x,y,z \in V$، $(x+y)+z=(x+y)+z$؛

ج) بردار یکتای 0 در V موجود است به طوری که برای هر $x \in V$، $x+0=x$؛

د) برای هر بردار x از V،بردار یکتای $-x$ در V موجود است به طوری که $x+(-x)=0$؛

و برای ضرب اسکالری،(برای هر $x,y \in V$ و هر $\alpha,\beta \in C$) داریم:

الف) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

[1] uniformly convergent topology [2] Vector Space

ب) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

ج) $1x=x$

د) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

تعریف ۲۶.۱. فرض کنید H یک فضای برداری روی میدان F باشد، تابع $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow F$ را یک ضرب داخلی[1] روی H می نامیم هرگاه برای هر $x,y,z \in H$ و $\alpha \in F$ داشته باشیم :

الف) $\langle x,x\rangle \geq 0$ ،

ب) $\langle x,x\rangle = 0$ اگر وتنها اگر $x=0$ ،

ج) $\overline{\langle x,y\rangle}=\langle y,x\rangle$ ،

د) $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$ ،

ه) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$.

تعریف ۲۷.۱. فضای برداری مختلط به همراه ضرب داخلی، فضای پیش هیلبرت[2] نامیده می‌شود.

تعریف ۲۸.۱. فرض کنید X فضایی برداری[3] روی میدان F باشد، تابع $\| . \| : X \longrightarrow [0,\infty)$ یک نرم [4] روی X نامیده میشود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف) $x=0$ اگر و فقط اگر $\| x \| = 0$

ب) به ازای هر $a \in F$ و هر $x \in X$، $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$،

[1]Inner product [2]pre Hilbert space [3]Vector Space [4]Norm

ج) به ازای هر $x, y \in X$، $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

فضای برداری X روی میدان F را یک فضای نرمدار[۱] گویند، اگر یک نرم $\| . \|$ روی X وجود داشته باشد. فضای نرمدار X با متر $d(x,y) = \| x-y \|$ یک فضای متریک است. حال اگر این فضای متریک کامل باشد یعنی هر دنباله کوشی [۲] در آن همگرا باشد، آن را یک فضای باناخ [۳] گوییم.

قضیه ۹.۱. فرض کنید $(H, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، اگر تابع $\| . \| : H \longrightarrow [0, \infty)$ را با ضابطه ی $\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ تعریف کنیم آنگاه $(H, \| . \|)$ یک فضای نرم دار خواهد بود.

تعریف ۲۹.۱. فضای پیش هیلبرت که نسبت به نرم $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ کامل است، فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

تعریف ۳۰.۱. حلقه[۴] یک مجموعه‌ی ناتهی R به همراه دو عمل (مجمولا جمع و ضرب) است که در آن

الف) $(R, +)$ گروه آبلی (جابجایی) است؛

ب) برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in R$، $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$؛

ج) برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in R$، $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ و $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\beta + \beta\gamma$

تعریف ۳۱.۱. حلقه‌ی A را جبر روی میدان F[۵] می‌نامیم هر گاه فضایی برداری روی F باشد و داشته باشیم :

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b) \qquad (\forall a, b \in A, \forall \alpha \in F)$$

[۱]Normed space [۲]Cauchy sequence [۳]Banach space [۴]ring [۵]an algebra over F

تعریف ۳۲.۱. فرض کنیم نرمی مانند $\|.\|$ روی جبر A، تعریف شده باشد. اگر

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \qquad \forall a, b \in A$$

آنگاه A جبری نرم دار[۱] روی F نامیده می‌شود.

اگر جبر A یکدار باشد، گاهی به تعریف جبر نرم دار شرط $\|1_A\| = 1$ را نیز می‌افزاییم.

تعریف ۳۳.۱. جبر نرم دار A را جبر باناخ[۲] روی F می‌نامیم اگر نسبت به نرم تعریف شده کامل باشد.

تعریف ۳۴.۱. فرض کنیم A جبری باناخ باشد. یک برگشت [۳] روی A نگاشتی مانند

$$\begin{cases} \star : \quad A \longrightarrow A \\ \\ \qquad a \mapsto a^\star \end{cases}$$

است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) برای هر $a, b \in A$ و برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$، $(\alpha a + \beta b)^\star = \overline{\alpha} a^\star + \overline{\beta} b^\star$؛

ب) برای هر $a, b \in A$، $(ab)^\star = b^\star a^\star$؛

ج) برای هر $a \in A$، $(a^\star)^\star = a$.

تعریف ۳۵.۱. $C^\star$-جبر[۴] A، جبر باناخ یکداری مانند A به همراه یک برگشت $\star$ است که برای هر $a \in A$، داریم:

$$\|a^\star a\| = \|a\|^2$$

[۱]normed algebra [۲]Banach algebra [۳]involution [۴]C^* – algebra

برای بیان مثال بعدی به تعریف زیر نیازمندیم:

تعریف ۳۶.۱. تبدیل خطی $T : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای برداری نرم دار، کراندار است هرگاه $c \geq ۰$ موجود باشد به طوری که:

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

نمادگذاری: اگر X و Y فضاهای برداری نرم داری باشند، فضای تمام نگاشتهای خطی و کراندار از X به Y را با $L(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. به آسانی می‌توان نشان داد که $L(X,Y)$ فضایی برداری است و تابع $||T|| \longrightarrow T$ تعریف شده توسط نرم

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = ۱\}$$

یک نرم روی $L(X,Y)$ است که نرم عملگری[۱] نامیده می‌شود.

مثال ۲.۱. اگر H فضای هیلبرت باشد آنگاه $B(H)$ فضای توابع خطی کراندار از H به H با عمل ترکیب توابع به عنوان ضرب حلقه و به همراه نرم عملگری، یک $C^\star$-جبر است.

تعریف ۳۷.۱. فرض کنیم A جبری باناخ، همراه با برگشت $\star$ باشد. زیرمجموعه‌ی M از A را خودالحاق[۲] نامیم هرگاه نسبت به $\star$ بسته باشد، یعنی برای هر $a \in M$، داشته باشیم $a^\star \in M$.

تعریف ۳۸.۱. فرض کنیم A یک $C^\star$- جبر باشد و $a \in A$. a را یک عنصر مثبت[۳] گوییم هرگاه

$$\exists\, b \in A, a = b^\star b$$

در این صورت می‌نویسیم $a \geq ۰$ و مجموعه‌ی تمام عناصر مثبت A را با A^+ نمایش می‌دهیم.

[۱]operator norm [۲]self adjoint [۳]positive