دانشگاه صنعتی شیراز

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

بررسی جوابهای سالیتونی و جوابهای عددی معادله‌ی برگرز و مقایسه بین آنها

دانشجو:

راضیه غلامپور

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل حسام الدینی

اساتید مشاور:

دکترعلیرضا فخارزاده جهرمی

دکتر علیرضا کشاورز

شهریور ماه ۱۳۸۸

تقدیم به:

خوبان زندگی، پدرم که هستی‌ام از برکت دستان مهربانش لبریز است و بی مانند ترین اسطوره‌ی عشق و فداکاری، مادرم و تمام کسانی که دوستشان دارم.

سپاسگزاری

سپاس و ثنا یگانه خالقی را که ذرات وجودم در تلألو حضورش نورانی می شود و نگاه خسته‌ام از جوشش مهرش جان می گیرد. سپاس می گویم هم او را که یگانه ترین در عظمت و تنها ترین در اوج و پاکترین در وجود است.

سپاس آنان را که روشنای ردای علمشان، نردبان ناجی تاریکیها ست، آنان که معلم میثاق مهرند و شکوفاگر شاخه‌های شباب اندیشه. اگرچه در کلام نمی گنجد، ژرف ترین سپاس خود را از زحمات بی شائبه استاد فاضل و بزرگوارم جناب آقای دکتر حسام الدینی که در سایه رهنمودهای عالمانه و توجه پدرانه‌شان توانسته ام گامی کوچک در دریای لایتناهی علم و معرفت بردارم، ابراز می دارم و همچنین شایسته است که از استاد عا لیقدر جناب آقای دکتر حمید رضا ملکی که در این راستا به حق مدیون و مرهون ارائه نظرات ارزشمند، همت عالمانه و ارشادات حکیمانه او بوده و هستم، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. از اساتید مشاور فرزانه، جناب آقای دکتر علیرضا فخارزاده و دکتر علیرضا کشاورزبه جهت رهنمودها و همکاریهای ارزشمندشان در به ثمر رسیدن این پایان نامه کمال تشکر و سپاس را دارم. سپاس و فروتنی به پیشگاه سرکار خانم دکتر جاهدی رئیس گروه ریاضی که در دوره تحصیل اینجانب چراغ راهم بودند را تقدیم می دارم. و بالاخره آنچه نه انکار پذیر است و نه فراموش شدنی، محبت، بزرگواری و تلاش دو شمع پر فروغ زندگی ام، پدر و مادر عزیزم است که زمینه رشد و شکوفایی اندیشه‌ام را فراهم نمودند. نسیم سخنهایشان نبض هر لحظه زندگی من است و از خداوند بزرگ اجازه می خواهم که بگویم، که تمام آنچه که بودم، هستم و خواهم بود همه و همه مدیون ایشان است.

چکیده

معادله برگرز مرتبه اول، یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای غیر خطی است که حالت ساده شده‌ای از معادلات ناویر—استوکس است. معادله برگرز به معادله مدل معروف است و از این رو اهمیت آن مشهود به نظر می رسد. معادله برگرز دارای انواع متفاوت است که هر کدام دارای کاربردهای مخصوص به خود است. این پایان نامه بر روی معادله‌ی برگرز مرتبه اول، جوابهای تحلیلی و جوابهای عددی آن بحث می کند. حل تحلیلی این معادله شامل حل سالیتونی آن است که با معرفی دو عنصر اساسی جواب، گامهای حل مسئله را پیگیری می کند و سپس کاربرد آن را در معادله برگرز مشاهده می کنیم و نهایتاً جواب سالیتونی جدید برای معادله برگرز بدست می آوریم. روشهای عددی بکار رفته شامل دو روش عدی ۸ نقطه‌ای و روش عددی ۱۲ نقطه ای از روشهای مولتی سیمپلکتیک است. با در نظر گرفتن مقادیر متفاوت از پارامترهای جواب سالیتونی، مقایسه ای با دو نوع جواب عددی ۸ نقطه‌ای و ۱۲ نقطه ای صورت می گیرد که نتایج نرم دو و نرم بینهایت خطای حاصل از مقایسه در جداول وجود دارد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

گرچه به طور بسیار گسترده به مطالعه معادله های دیفرانسیل خطی پرداخته شده است، لیکن اطلاعات اندکی در مورد معادله‌های دیفرانسیل غیر خطی وجود دارد. اما چرا باید به معادلات دیفرانسیل غیر خطی توجه کرد؟

دلیل اساسی آن است که بسیاری از دستگاههای فیزیکی، و معادلاتی که این دستگاهها را توصیف می کنند، در اصل غیر خطی اند. خطی نمودن های عادی دراصل ابزارهایی تقریب کننده هستند که‌کاربرد آنها تا حدودی حاکی از ناتوانی در مواجهه با مسائل غیر خطی اصلی است. بلا فاصله باید اضافه کنیم که موارد فیزیکی بسیاری وجود دارند که در آنها تقریب خطی، برای اکثر مقاصد، ارزشمند و مناسب است. با این حال، این واقعیت همچنان پا برجاست که در بسیاری از موارد، خطی کردن قابل توجیه نیست. حتی اینشتین پیشنهاد کرده که چون معادلات اساسی فیزیک غیر خطی‌اند، باید در تمامی ریاضی فیزیک تجدید نظر شود. اگر مطلب عنوان شده توسط اینشتین در آن زمان روشن می بود ریاضیات آینده به احتمال زیاد با ریاضیات گذشته و حال خیلی تفاوت می کرد.

یکی از انواع معادلات غیر خطی، معادله‌ی برگرز[۱] یک بعدی می باشد که در این پایان نامه بر روی نوع جوابها و کاربردی از آن بحث می شود. این پایان نامه مشتمل بر شش فصل است:

عناوین مهم فصل دوم، شامل معرفی معادله‌ی برگرز و انواع آن، ذکر موردی کاربردهایی از معادله‌ی برگرز یک بعدی، چگونگی بدست آوردن معادله‌ی برگرز از معادلات ناویر ـ استوکس و تاریخچه‌ای از زندگی جان برگرز می باشد.

فصل سوم، به بحث پیرامون حل سالیتونی معادله‌ی برگرز اختصاص دارد؛ سالیتون

---

[۱] $Burgers' equation$

یکی از مفاهیم ریاضی است که از دل معادلات دیفرانسیل غیر خطی پا به عرصه‌ی وجود گذاشته است. مفهوم سالیتون محرک مهمترین پیشرفت ها در تحلیل رفتار مسائل مقدار اولیه برای معادلات دیفرانسیل غیر خطی توصیف کننده انتشار موج است. دراین فصل، روشی برای بدست آوردن جوابهای منفرد معادله‌ی برگرز یک بعدی ارائه می گردد و این جواب طبق مقاله‌ی [۲۸] جوابهایی سالیتونی برای معادله‌ی مذکور محسوب می شوند. مطالب این فصل به عنوان سخنرانی در چهلمین کنفرانس ریاضی ایران در دانشگاه صنعتی شریف ارائه گردید[۲۹].

فصل چهارم، به بررسی روشهای متنوع حل عددی معادله‌ی برگرز می پردازد. در ابتدا، این سوال مطرح می شود که با وجود داشتن جواب تحلیلی (جواب سالیتونی) برای معادله‌ی برگرز، چرا ما به دنبال تعیین جواب عددی آن می باشیم؟

لازم به ذکر است که معادله‌ی برگرز و معادله های دیگری چون معادلات موج مرتبه اول، انتقال گرما و معادله لاپلاس، به معادله‌های مدل مشهورند، زیرا از آنها برای مدل کردن رفتار معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مشکل تر استفاده می گردد. برای مثال معادله‌ی گرما را می توان به عنوان یک معادله‌ی مدل برای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی، نظیر معادله‌های لایه مرزی بکار برد. تمام این معادله‌های مدل با شرایط مرزی و اولیه مشخص، دارای حلی تحلیلی هستند. ازاین اطلاعات می توان برای انتخاب و مقایسه سریع روشهای عددی بکار رفته در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای پیچیده تر، استفاده کرد .

روشهایی که در فصل چهارم مورد بررسی قرار خواهیم داد، روشهای صریح، ضمنی و کاملاً ضمنی هستند. از بین روشهای صریح، روش زمان پیشرو — مکان مرکز و روش لیپ فراگ را می توان اشاره نمود.

در روشهای صریح اندازه‌ی گام زمانی مطرح می باشند برای غلبه بر محدودیت اندازه‌ی گام می توان از روشهای ضمنی استفاده کرد. مزیت روشهای ضمنی در پایداری بدون قید آنها نهفته است. اگرچه در مقایسه با یک روش صریح در هر گام زمانی به تلاش محاسباتی بیشتری نیاز است، ولی ممکن است زمان کل محاسبات کمتر گردد. روش ضمنی مورد مطالعه، روش کرانک — نیکلسون [۱۷] است اما خواهیم دید که این روش نیز علیرغم پایداری بی قید و شرط، برای برخی مقادیر پارامتر معادله‌ی برگرز ناکارآمد خواهد بود بنابراین از روشهای دیگر استفاده خواهیم نمود که روشهایی کاملاً ضمنی می باشند.

در سال ۱۹۹۰روشهای سیمپلکتیک [۲] معرفی گردیدند و به طور سیستماتیک برای سیستمهای هامیلتونی مطابق با چارچوب هندسه‌ی سیمپلکتیک گسترش پیدا کردند [٦].

نتایج عددی نشان می دهند که روشهای سیمپلکتیک که برای گامهای زمانی طولانی شبیه سازی شده اند کارایی بالایی دارند [۷].

اخیراً مرسدن [۳]، بریدز [۴] و ریچ [۵] تعمیمی از روشهای سیمپلکتیک که آنهارا مولتی سیمپلکتیک [٦] نامگذاری کردند پیشنهاد کردند.

از بین این روشها می توانیم به روشهای ۸ نقطه ای و ۱۲ نقطه‌ای از بسته ی روش را اشاره کرد. بسته ی روش، [۷] بسته‌ای است که در آن چندین طرح عددی از منا بع متفاوت در آن

---

[۲] $symplectic$

[۳] $marsden$

[۴] $Brides$

[۵] $Rich$

[٦] $multisymplectic$

[۷] $Box\ scheme$

وجود دارد. روش ۸ نقطه ای و ۱۲ نقطه ای مولتی سیمپلکتیک توسط اشر [8] و مک لاشان [9] ابداع شد.

فصل پنجم که در واقع اصلی ترین فصل این پایان نامه می باشد اختصاص به مقایسه بین جواب سالیتونی که در فصل سوم بدست آمده و جواب عددی حاصل از روشهای ۸ نقطه ای و ۱۲ نقطه‌ای مولتی سیمپلکتیک از بسته‌ی روش دارد. لازم به ذکر است که با توجه به نوع جواب تحلیلی وجواب عددی این مقایسه برای اولین بار صورت می گیرد.

در آخرین فصل، ضمن بیان نتایج حاصل از تحقیق انجام یافته در این پایان نامه، پیشنهادهایی جهت ادامه تحقیقات در این زمینه نیز ارائه می گردد.

---

[8] Asher

[9] mclachan

فصل ۲

معرفی معادله‌ی برگرز

۱.۲ مقدمه

بسیاری از فرآیندهای فیزیکی موجود در طبیعت که در دینامیک سیالات، الکتریسیته، مغناطیس، نور، مکانیک یا شارش گرما ظاهرمی‌شوند با معادلات دیفرانسیل پاره‌ای $(PDEs)$ قابل توصیف می‌باشند. مطالعه‌ی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از قرن هیجدهم میلادی آغاز شد. در آن زمان افرادی چون اویلر [۱]، دالامبر [۲]، لاگرانژ[۳] و لاپلاس [۴] از آن در تشریح و فرمول بندی فرآیندهای فیزیکی استفاده می کردند.
در اواسط قرن نوزدهم میلادی، خصوصاً با کار ریمان[۵]، معادلات دیفرانسیل پاره ای به عنوان ابزاری اساسی در شاخه‌هایی از ریاضیات وارد شدند[۵۱]. اکثر قوانین طبیعی فیزیک نظیر معادلات ماکسول[۶]، قانون تبرید نیوتن، معادلات ناویر — استوکس[۷]، معادلات حرکت نیوتن [۸] و معادله شرودینگر[۹] در دینامیک کوانتوم بر حسب $(PDEs)$ بیان شده‌اند[۲۲].
به بیان دیگر این قوانین پدیده‌هایی فیزیکی را به وسیله‌ی ارتباط مکان و مشتقات نسبت به زمان توضیح می‌دهند. وجود مشتق ها در این معادلات بدان دلیل است که مشتق‌ها امور طبیعی(مانند سرعت، شتاب، نیرو، اصطکاک، شارو شدت جریان) را نمایش می‌دهند. از این رو با معادلاتی سروکار داریم که مشتقات پاره‌ای کمیت مجهولی را که می خواهیم بیابیم، به

---

[۱] $Euler$
[۲] $D'Alembert$
[۳] Lagrange
[۴] Laplace
[۵] Riemann
[۶] $Maxwell's\ equation$
[۷] $Navier\ stokes' equations$
[۸] $Newton's\ motion\ law$
[۹] $Schrodinger's\ equation$

هم ارتباط می دهند.

با توجه به مطالب ذکر شده در مورد معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، درک رفتار فیزیکی مدل هایی که توسط این معادلات بیان می شوند و همچنین دانستن رفتار ریاضی، خواص و حل چنین معادلاتی ضروری به نظر می رسد. از این رو در بخش بعد، اینگونه معادلات را هم از منظر فیزیکی و هم از منظر ریاضی مورد بررسی قرار می دهیم.

۲.۲ تقسیم‌بندی فیزیکی

۱.۲.۲ مسائل تعادل

مسائل تعادل [۱۰]، مسائلی هستند که در آن ها، حل یک معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای در یک حوزه‌ی بسته با شرایط مرزی داده شده مد نظر است . معادله‌های تعادل از نوع معادله‌های مقدار مرزی [۱۱] هستند. نمونه هایی از این مسائل عبارتند از توزیع دما در حالت پایا، جریان تراکم‌ناپذیر و ایده آل و توزیع تنش در جامدات در حالت تعادل. برخی مواقع به مسائل تعادل، مسائل جوری [۱۲] نیز می‌گویند. این یک اسم بامسمیٰ است، زیرا جواب معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای در هر نقطه از حوزه مورد نظر بستگی به شرایط مرزی از پیش تعیین شده در کلیه‌ی نقاط روی مرز دارد. به این ترتیب شرایط مرزی مطمئناً معیاری برای حل در دامنه مورد نظر است. از لحاظ ریاضی مسائل تعادل به وسیله‌ی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیضوی بیان می‌شوند[۵۲].

---

[۱۰] equilibrium

[۱۱] boundary value problem

[۱۲] jury

۲.۲.۲ مسائل گام به گام

مسائل گام به گام [۱۳] یا انتشار، [۱۴] مسائل گذرا (غیر پایا) یا شبه گذرا هستند و در آن حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای در یک محدوده‌ی باز و با داشتن شرایط اولیه و شرایط مرزی به‌دست می‌آید. وجه تسمیه مسائل گام به گام روشن است؛ شرایط اولیه مشخص می شود و حل از روش گام به گام به طرف جلو نسبت به زمان یا مسیر مشابه زمان بدست می آید. این گروه مسائل را، مسائل مقدار اولیه یا مقدار مرزی اولیه نیز می‌گویند. حل از روش گام به گام باید از سطح شرط اولیه به طرف خارج محا سبه شود به طوری‌که شرط اولیه را نیزبرقرار کند. از دید ریاضی، این مسائل به وسیله‌ی معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای سهموی یا هذلولوی بیان می‌شوند. مثالهای معمولی برای مسائل گام به گام شامل جریان گذرا وایده‌آل، جریان پایا، جریان فراصوتی و ایده‌آل، انتقال گرمای حرارتی و گذرا و جریان لایه‌های مرزی هستند[۵۲].

۳.۲ تقسیم‌بندی ریاضی

تقسیم بندی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بر اساس مفاهیم مشخصه‌هایی چون خط(در مسائل دو بعدی) و صفحه (در مسائل سه بعدی) انجام می شود که در طول این خط یا صفحه، خواص معینی ثابت می‌ماند. این خطوطیا صفحه‌های مشخصه، به جهت فیزیکی انتقال اطلاعات در مسئله ارتباط دارند. معادله‌هایی (به صورت دستگاه یا تک معادله‌ای) که از حل معادله‌هایی شبیه موج تبعیت می‌کنند به عنوان معادله‌های هذلولوی شناخته می‌شوند. معادله‌هایی که سبب استهلاک امواج می‌شوند، به عنوان معادله‌های سهموی شناخته شده و

[۱۳] marching
[۱۴] propagation

معادله‌هایی که حل آن ها شبیه موج نیست، معادله‌های بیضوی هستند. هرچند معادله‌ها یا دستگاه معادله‌های مرتبه اول را نیز می‌توان به صورت بالا تقسیم بندی کرد ولی شایسته است که از نظر ریاضی بررسی گردند. شکل کلی یک معادله ی دیفرانسیل پاره ای مرتبه ی دوم به صورت زیر است.

$$a\Phi_{xx} + b\Phi_{xy} + c\Phi_{yy} + d\Phi_x + e\Phi_y + f\Phi = g(x,y)$$

که در آن a، b، c، d، e و f توابعی از x ، y ، Φ، Φ_x و Φ_y باشند. دررابطه‌ی بالا اگر a، b و c ثابت باشند، جواب شکل ساده‌ای دارد. توجه کنید که پارامتر $(b^۲ - ۴ac)$ نقش مهمی در طبیعت منحنی‌های مشخصه بازی می‌کند. اگر$(b^۲ - ۴ac)$ مثبت باشد، دو گروه مجزا از منحنی‌های مشخصه حقیقی وجود دارد. اگر$(b^۲ - ۴ac)$ صفر باشد، یک گروه از آن‌ها وجود دارد. اگر $(b^۲ - ۴ac)$ منفی باشد، هیچ مشخصه‌ی حقیقی وجود ندارد. در هندسه تحلیلی نیز معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را می‌توان به این صورت تقسیم‌بندی کرد:
۱ — هذلولوی: اگر $(b^۲ - ۴ac)$ مثبت باشد. ۲ — سهموی: اگر $(b^۲ - ۴ac)$ صفر باشد و ۳ — بیضوی: اگر $(b^۲ - ۴ac)$ منفی باشد. توجه کنید اگر a، b و c ثابت نبا شند، این تقسیم‌بندی ممکن است در دامنه‌ی حل از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر تغییر کند[٦۴].

۴.۲ روشهای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

در این‌جا بعضی روش‌های حل معادلات پاره ای را به‌طور مختصر مرور می‌کنیم:

۱) روش جداسازی متغیرها:

این روش معادله‌ی PDE با n متغیر را به n معادله‌ی ODE تبدیل می‌کند[۵۳].

۲) تبدیل‌های انتگرالی :

این روند یک PDE با n متغیر مستقل را به یک PDE با $(n-1)$ متغیر تبدیل می‌کند[۱۴]، [۱۵] و[۱۸].

۳) تغییر مختصات:

این روش با تغییر مختصات مسئله نظیر دوران محورها یا انتقال آنها معادله PDE را به‌معادلات ODE یا یک معادله PDE دیگر تبدیل می‌کند که حل آن آسانتر است [٦۴].

۴) روش اختلال:

این روش یک مسئله‌ی غیر خطی را به یک دسته مسائل خطی که مسئله‌ی غیرخطی را تقریب می‌کند، تبدیل می‌سازد[۱۱].

۵) پاسخ ضربه‌ای:

این روند شرایط اولیه‌ی مرزی را به ضربه‌های ساده تجزیه کرده و پاسخ مربوط به هر ضربه را پیدا می‌کند؛ سپس پاسخ کل با افزودن این پاسخ‌های ساده به‌دست می‌آید[۵۳] و[۵۵].

٦) معادلات انتگرالی :

این روش یک PDE را به یک معادله‌ی انتگرالی (معادله‌ای که در آن تابع مجهول داخل یک انتگرال است) تبدیل می‌کند. سپس معادله‌ی انتگرالی با تکنیک‌های مربوطه حل می‌شود[٦۴].

۷) روش‌های حساب تغییراتی :

این روش‌ها جواب PDE را از طریق تنظیم مجدد معادله به صورت یک مسئله‌ی کمینه سازی از دسته مسائل حساب تغییرات می‌یابند[۱۵].

۸) بسط توابع ویژه: