دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم

پایان نامه دکتری

ریاضی محض

عنوان

رنگ آمیزی گراف‌ها و ابرگراف‌ها

نگارش

مریم قنبری

اساتید راهنما

دکتر محمد جواد نیك مهر

دکتر سعید اکبری

بهار ۱۳۹۲

بسم ا... الرحمن الرحیم

خدایا تقدیر مرا خیر بنویس

آنگونه که آنچه را تو دیر می خواهی من زود نخواهم

و آنچه را تو زود می خواهی من دیر نخواهم.

تقدیم به همسرم

برای تمامی گذشت‌ها و مهربانی‌هایش...

تقدیر و سپاسگذاری از خانواده‌ام

تقریباً مدت ۲۴ سال می‌باشد که درس خواندن تمامی اوقات مرا به خود مشغول کرده است. همیشه فراهم آوردن محیطی مناسب برای مطالعه اصلی‌ترین دغدغه پدر و مادرم بود آنچنان‌که در مسیر زندگی مشترک، تمام جاذبه‌های مفرح را با آرامشی مطلق صرفاً جهت نیل به آن هدف تعویض می‌نمودند. کمترین وظیفه خود را سپاسگزاری ویژه از خانواده‌ام می‌دانم که در گذر از تمامی مقاطع تحصیلی‌ام با من یار بودند و امیدوارم با اخذ مدرک دکتری ذره‌ای از آن زحمات را بی پاسخ نگذاشته باشم.

تشکر و قدردانی

جناب آقای دکتر اکبری، استاد عالیقدر

آن زمان که در خاتمه مقطع کارشناسی به نظرم ادامه کار در فضای ریاضی متصور نبود و تنها به اتمام دوره تحصیلی‌ام می‌اندیشیدم، دستان پرتوان و قدرتمند شما بود که مرا از یک‌سو با ریسمانی که سوی دیگر آن در دستان شما گره زده شده بود، به سمت فراگیری بیشتر می‌کشاند. آنقدر این کشش پر جاذبه بود که در مقطع کارشناسی ارشد، آن فضای یکنواخت به محیطی پرطراوت و شیرین تبدیل گردید. تغییر نگرش من به علم ریاضی تنها در هنر و دانش آن استاد ارجمند متجلی می‌گردید و چقدر شیرین و دلنشین بود که از طریق آموزش‌های بی‌دریغ و بی‌منت شما توانستم در جلسه دفاعیه مقطع دکتری حلقه اشک را در چشمان مادرم مشاهده کنم. تشکر از شما استاد فرهیخته در چند کلمه و سطر نمی‌گنجد. تنها کاری که از اینجانب برمی‌آید آرزوی سلامتی و تندرستی برای شما است که از این اقیانوس بی‌کران دانش ریاضی، سایر علاقه مندان نیز بهره‌مند گردند.

جناب آقای دکتر نیک‌مهر، استاد ارجمند

وظیفه خود می‌دانم از تلاش صمیمانه و رهنمودهای شما که در مقطع دکتری با همت خدا پسندانه اینجانب را راهنمائی نموده، کمال سپاسگزاری را داشته و برایتان آرزوی توفیق و سربلندی نمایم.

در خاتمه لازم می‌دانم از آقایان دکتر قلندرزاده، دکتر قربانی، دکتر کیانی و دکتر میمنی که زحمت داوری رساله‌ام را به عهده داشتند بسیار صمیمانه تشکر نمایم و برایشان آرزوی موفقیت داشته باشم.

چکیده

یك k-رنگ آمیزی یالی در گراف G تابعی مانند $f : E(G) \longrightarrow L$ می‌باشد به طوری که $|L| = k$ و برای هر دو یال مجاور e_1 و e_2 در G، داشته باشیم $f(e_1) \neq f(e_2)$. گراف G، k-رنگ پذیر یالی است اگر برای G یك k-رنگ آمیزی یالی وجود داشته باشد. عدد رنگی یالی گراف G که با نماد $\chi'(G)$ نمایش داده می‌شود، کوچکترین مقدار k است که G دارای k-رنگ آمیزی یالی است. مشهورترین قضیه در رنگ آمیزی یالی گراف‌ها منسوب به ویزینگ می‌باشد و بیان می‌کند برای گراف دلخواه G، همواره $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + ۱$، که در آن $\Delta(G)$ ماکزیمم درجه گراف می‌باشد. بر این اساس یك گراف را کلاس ۱ گویند اگر $\chi'(G) = \Delta(G)$ و کلاس ۲ گویند اگر $\chi'(G) = \Delta(G) + ۱$. همچنین زیر گراف القائی روی رئوس ماکزیمم درجه در گراف G را هسته گراف می‌گویند و آن را با نماد G_Δ نمایش می‌دهند.

تعیین کلاس ۱ یا کلاس ۲ بودن یک گراف از جمله مهم‌ترین مسائل در مبحث رنگ آمیزی یالی گراف‌ها می‌باشد. برای مثال ثابت شده است که اگر G_Δ جنگل باشد، آنگاه G کلاس ۱ است. در این رساله این قضیه را بدین صورت تعمیم داده‌ایم که اگر G_Δ به صورت اجتماعی از درخت‌ها و گراف‌های تک‌دور باشد و اجتماعی از دورها نباشد، آنگاه G کلاس ۱ است.

همچنین حدس بسیار مهمی در رنگ‌آمیزی یالی گراف‌ها توسط هیلتون و ژائو مطرح شده است که در آن گراف‌های کلاس ۲ را بر اساس ساختار هسته‌شان رده‌بندی می‌کند و بیان می‌کند اگر G گرافی همبند بوده به طوری که $\Delta(G_\Delta) \leq ۲$، آنگاه G کلاس ۲ است اگر و تنها اگر $|E(G)| > \lfloor\frac{|V(G)|}{۲}\rfloor\Delta(G)$ یا $G = P^*$، که در آن P^* گراف حاصل از حذف یک رأس گراف پترسن است. در راستای این حدس تا به حال نتایج گوناگونی بدست آمده است که حدس را برای حالاتی خاص مانند $|G_\Delta| \in \{۳, ۴, ۵\}$ یا $\Delta(G) = ۳$ ثابت می‌کنند. در این رساله توانسته‌ایم این حدس را برای گراف‌هائی که دارای برش یالی از سایز حداکثر ۲ هستند، برای گراف‌های زوج رأسی که دارای هسته‌ای فرد رأسی هستند و همچنین برای گراف‌های زوج رأسی که سایز هسته‌شان حداکثر ۹ رأس باشد یا هسته‌شان یك دور از سایز حداکثر ۱۳ باشد ثابت کنیم.

کلمات کلیدی. رنگ‌آمیزی یالی، هسته گراف، گراف بحرانی، گراف لبریز.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

مقدمه

تعریف رنگ‌آمیزی یالی در گراف‌ها بدین صورت است که باید یال‌های گراف را به صورتی رنگ کنیم که به هر دو یال مجاور رنگ‌های متفاوتی تخصیص داده شده باشد. کوچکترین عدد صحیح k به طوری که بتوان یال‌های گراف G را با آن رنگ‌آمیزی یالی کرد عدد رنگی یالی G نام دارد و با نماد $\chi'(G)$ نمایش داده می‌شود. همچنین هسته گراف G را زیر گراف القائی روی رئوس ماکزیمم درجه در گراف می‌گویند و با نماد G_Δ نمایش می‌دهند.

مشهورترین قضیه رنگ‌آمیزی یالی گراف‌ها توسط ویزینگ[۱] در سال ۱۹۶۵ اثبات شده است و می‌گوید برای هر گراف دلخواه G همواره داریم، $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + ۱$. بر این اساس گراف G را کلاس ۱ گویند اگر $\chi'(G) = \Delta(G)$ و کلاس ۲ گویند اگر $\chi'(G) = \Delta(G) + ۱$. تعیین کلاس ۱ یا کلاس ۲ بودن یك گراف در بحث رنگ‌آمیزی یالی گراف‌ها از دسته مسائل بسیار سخت و از جمله مسائل NP–تمام می‌باشد. برای این منظور به سراغ تعریف هسته یک گراف رفته‌اند تا با بکارگیری ابزاری مناسب به رده‌بندی گراف‌ها از نظر کلاس ۱ یا کلاس ۲ بودن برسند. در سال‌های ۱۹۶۵ – ۲۰۰۳، افرادی همچون هیلتون[۲]، ژائو[۳]، چتویند[۴]، کاریولارو[۵] و ... در مراجع [۵، ۷، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۲۳] گونه‌ای از گراف‌ها را که هسته‌شان دارای ساختار خاصی است را مورد بررسی قرار داده‌اند و نتایج قابل توجهی در رابطه با عدد رنگی یالی گراف‌ها بدست آورده‌اند. از جمله ویزینگ در سال ۱۹۶۵ در [۲۳] ثابت کرد که اگر G_Δ حداکثر ۲ رأس داشته باشد، آنگاه G کلاس ۱ است. ۸ سال بعد، فورنیر[۶] در [۱۲] نتیجه ویزنگ را بدین صورت تعمیم داد که اگر G_Δ فاقد دور باشد، آنگاه G کلاس ۱ است. از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت که شرط لازم برای کلاس ۲ بودن یك گراف این است که هسته آن گراف شامل دور باشد. در همین رابطه هیلتون و ژائو در [۱۵، ۱۶] مسئله تعیین کلاس گراف‌هائی را در نظر گرفتند که هسته‌شان اجتماع مجزائی از دورهاست. در این رابطه آن‌ها تنها توانستند تعیین کنند که تعداد کمی از این گراف‌ها کلاس ۲ هستند. همچنین آن‌ها حدس بسیار مهمی را در رنگ آمیزی یالی گراف‌ها مطرح کردند که بیان می‌کند اگر G گرافی همبند بوده و $\Delta(G_\Delta) \leq ۲$، آنگاه G کلاس ۲ است اگر و تنها اگر $|E(G)| > \lfloor \frac{|V(G)|}{۲} \rfloor \Delta(G)$ یا $G = P^*$ که در آن P^* گراف حاصل از حذف یک رأس گراف پترسن است. در راستای این حدس قضایای زیادی مطرح شده است که حدس را برای حالاتی که $\Delta(G) = ۳$ یا $|G_\Delta| \in \{۳, ۴, ۵\}$ ثابت می‌کند.

[۱] Vizing
[۲] Hilton
[۳] Zhao
[۴] Chetwynd
[۵] Cariolaro
[۶] Fournier

مقالات [۱]، [۲] و [۳] مستخرج از رساله می‌باشند و در آن‌ها حدس مذکور برای حالات خاصی ثابت شده است.

کلیه قضایا، لم‌ها و نتایجی که در این رساله ثابت شده‌اند مطالبی است که در این سه مقاله بیان گردیده‌اند و لذا همگی جدید می‌باشند.

در مرجع [۱]، عدد رنگی یالی گراف‌هائی را تعیین می‌کنیم که دارای برش یالی خاصی باشند. در مرجع [۲]، حدس مذکور را برای گراف زوج رأسی G که $|G_\Delta| \leq ۹$ یا $G_\Delta = C_{۱۰}$ ثابت می‌کنیم و در مرجع [۳]، حدس مذکور را برای گراف‌های زوج رأسی که هسته‌شان یك دور از سایز حداکثر ۱۳ می‌باشد ثابت می‌کنیم.

بنابراین در فصل ۱، تعاریف و قضایای مرتبط با بحث رنگ‌آمیزی یالی گراف‌ها را مطرح می‌کنیم.

در فصل ۲، نتایجی را در رنگ‌آمیزی یالی گراف‌ها بیان می‌کنیم که حدس مذکور را برای حالاتی ثابت می‌کند.

مریم قنبری

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

بهار ۱۳۹۲

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل، برای راحتی خواننده، سعی می‌کنیم تعاریف و قضایای مقدماتی لازم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را یادآوری کنیم. بخش ۱.۱ را به مفاهیم و قضایای مربوط به نظریه گراف‌ها اختصاص می‌دهیم و در بخش ۲.۱ نیز تعاریف و قضایای مقدماتی از رنگ آمیزی یالی در گراف‌ها را یادآوری می‌کنیم.

۱.۱ پیش‌نیازهای مربوط به نظریه گراف‌ها

گراف G از یک زوج مرتب $(V(G), E(G))$ تشکیل شده است. $V(G)$ یک مجموعه ناتهی است که آن را مجموعه رئوس می‌نامند و $E(G)$ مجموعه‌ای است از زوج‌های نامرتب از رئوس G که آن را مجموعه یال‌های گراف G می‌نامند. گراف‌هائی که در این رساله در نظر گرفته می‌شوند، همگی ساده‌اند؛ یعنی یال چندگانه و طوقه ندارند. تعداد رئوس گراف G را مرتبه گراف G گویند و با نماد $|G|$ نشان می‌دهند. گراف G را همبند گویند اگر بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد. مؤلفه همبندی H از گراف G را مؤلفه فرد گویند اگر مرتبه H فرد باشد و تعداد چنین مؤلفه‌هائی را با $odd(G)$ نمایش می‌دهند. همچنین $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ به ترتیب مینیمم درجه و ماکزیمم درجه در گراف را نشان می‌دهند. برای هر رأس $v \in V(G)$، $d_G(v)$ و $N_G(v)$ به ترتیب درجه رأس v و مجموعه رئوس مجاور با رأس v را در گراف G نشان می‌دهند. همچنین $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. فرض کنید H زیرگرافی از G باشد. برای هر رأس دلخواه v از G، $N_H(v)$ برابر است با $N_G(v) \cap V(H)$. همچنین قرار می‌دهیم $d_H(v) = |N_H(v)|$. هسته[۱] گراف G که با نماد G_Δ نمایش داده می‌شود زیرگراف القائی روی رئوس با ماکزیمم درجه است.

[۱] Core

یك یال برشی[۲] (رأس برشی[۳])، یك یال (یك رأس) در گراف است که حذف آن تعداد مؤلفه‌های همبندی G را افزایش می‌دهد. یك برش یالی[۴] (برش رأسی[۵])، مجموعه‌ای از یال‌ها (رئوس) در گراف است که حذف آن‌ها تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف را افزایش می‌دهد. همچنین یك گراف همبند را k- همبند یالی[۶] (k- همبند[۷]) گویند اگر حذف هر $k-۱$ یال ($k-۱$ رأس)، گراف را ناهمبند نکند.

یك k- عامل[۸] در گراف G زیرگراف فراگیر H است به طوری که برای هر رأس $v \in V(H)$، $d_H(v) = k$. در حالت $k = ۱$، H را یك تطابق کامل از G می‌گویند. همچنین یك (a, b)- عامل[۹] در گراف G زیرگراف فراگیر H است که برای هر رأس $v \in V(H)$، $d_H(v) \in \{a, b\}$ و یك (a, b)-عامل منظم[۱۰] در گراف G، یك (a, b)-عامل است به طوری که هر مؤلفه H گرافی منظم باشد. قضیه زیر که منسوب به تات[۱۱] می‌باشد و در صفحه ۴۴ مرجع [۴] مطرح شده است، یکی از قضایای مهم در نظریه گراف است که شرط لازم و کافی برای وجود تطابق کامل در یک گراف را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۰۱. فرض کنید G گرافی دلخواه باشد. در این صورت G دارای تطابق کامل است اگر و تنها اگر برای هر زیر مجموعه S از رئوس G داشته باشیم $odd(G \setminus S) \leq |S|$.

برای مجموعه $X \subseteq V(G)$ ($Y \subseteq E(G)$)، $G \setminus X$ ($G \setminus Y$) گراف حاصل از حذف رئوس X (یال‌های Y) از G می‌باشد. همچنین برای زیر گراف دلخواه H از G، منظور از $G \setminus H$ زیر گراف القائی رأسی روی $V(G) \setminus V(H)$ است. برای $S \subseteq V(G)$، زیرگراف القائی روی S را با نماد $\langle S \rangle$ نشان می‌دهیم. برای دو گراف دلخواه G و H، $G \vee H$ پیوند[۱۲] دو گراف G و H گفته می‌شود و گرافی با مجموعه رئوس $V(G) \cup V(H)$ و مجموعه یال‌های

$$E(G \vee H) = E(G) \cup E(H) \cup \{xy \mid x \in V(G),\ y \in V(H)\}$$

تعریف می‌شود.

[۲] Cut edge
[۳] Cut vertex
[۴] Edge cut
[۵] Vertex cut
[۶] k-edge connected
[۷] k-connected
[۸] k-factor
[۹] (a, b)-factor
[۱۰] (a, b)-regular factor
[۱۱] Tutte
[۱۲] Join

چند گراف خاص

مسیر n رأسی، دور n رأسی و گراف کامل n رأسی را به ترتیب با P_n، C_n و K_n نشان می‌دهیم.

گراف k- بخشی، گرافی است که می‌توان مجموعه رئوس آن را به k زیرمجموعه $X_1, X_2, \ldots, X_k$، طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک زیرمجموعه نباشد. گراف k- بخشی کامل یک گراف ساده k-بخشی است که در آن، هر رأس به تمام رأس‌هایی که در زیرمجموعه‌ای غیریکسان با آن قرار دارند، وصل شده است. در حالت $k = 2$، اگر $|X_1| = m$ و $|X_2| = n$، آن‌گاه گراف دو بخشی کامل را با نماد $K_{m,n}$ نشان می‌دهند. گراف دوبخشی همبند G را گراف ستاره نامند هرگاه یکی از بخش‌های آن تک‌رأسی باشد.

گراف G را فاقد پنجه[۱۳] گویند اگر G دارای زیرگراف القائی رأسی $K_{1,3}$ نباشد. در رابطه با وجود تطابق کامل درگراف‌های فاقد پنجه قضیه مشهور زیر توسط سامنر[۱۴] ثابت شده است.

قضیه ۲.۱. [۲۲] اگر G گرافی همبند، فاقد پنجه و از مرتبه زوج باشد، آن‌گاه G دارای تطابق کامل است.

گراف همبند G را تک‌دور گویند اگر G شامل دقیقاً یك دور باشد.

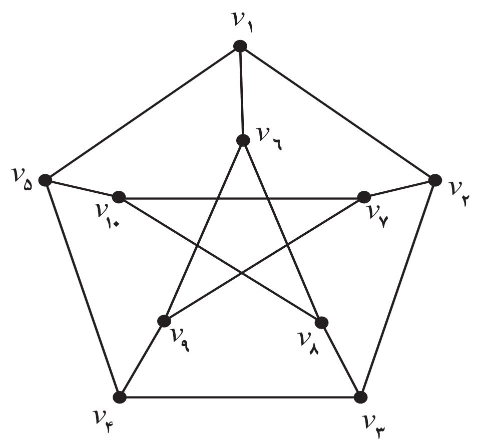
فرض کنید H زیرگرافی ازگراف G بوده و Q و R زیرمجموعه‌هائی از $V(G)$ باشند. در این صورت مجموعه یال‌های گراف H را که یك سر آن‌ها در Q و سر دیگرشان در R است را با نماد $E_H(Q, R)$ نشان داده و تعداد یال‌های این مجموعه را با نماد $e_H(Q, R)$ نشان می‌دهیم.

۲.۱ رنگ آمیزی یالی در گراف‌ها

یك k- رنگ آمیزی یالی درگراف G تابع $f : E(G) \longrightarrow L$ می‌باشد به طوری‌که $|L| = k$ و برای هر دو یال مجاور e_1 و e_2 در G، داشته باشیم $f(e_1) \neq f(e_2)$. گراف G، k- رنگ پذیر یالی است اگر برای G یك k-رنگ آمیزی یالی وجود داشته باشد. عدد رنگی یالی گراف G که با نماد $\chi'(G)$ نمایش داده می‌شود، کوچکترین مقدار k است که G دارای یک k-رنگ آمیزی یالی است. برای بدست آوردن اطلاعات بیشتر در مورد رنگ آمیزی یالی درگراف‌ها، به خواننده مرجع [۱۱] را معرفی می‌کنیم.

قضیه مشهور زیر در رنگ آمیزی یالی گراف‌ها، یکی ازکاربردی‌ترین قضایا در این مبحث بوده و منسوب به ویزینگ می‌باشد.

[۱۳] Claw-free
[۱۴] Sumner



شکل ۱.۱: گراف پترسن

قضیه ۳.۱. برای گراف دلخواه G، داریم $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

یك گراف را کلاس ۱[۱۵] گویند اگر $\chi'(G) = \Delta(G)$ و کلاس ۲[۱۶] گویند هرگاه $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

مثال ۱.۱. گراف پترسن که در شکل ۱.۱ نشان داده شده است کلاس ۲ می‌باشد.

برهان. با برهان خلف فرض می‌کنیم گراف G دارای یك ۳-رنگ آمیزی یالی c با رنگ‌های $\{1, 2, 3\}$ باشد. بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $c(v_1v_2) = c(v_3v_4) = 1$، $c(v_2v_3) = c(v_4v_5) = 2$ و $c(v_1v_5) = 3$ که نتیجه می‌دهد $c(v_1v_6) = 2$، $c(v_3v_8) = c(v_4v_9) = 3$ و لذا $c(v_6v_8) = c(v_6v_9) = 1$ که تناقض است. بنابراین $\chi'(G) \geq 4$ و چون $\Delta(G) = 3$، بنابر قضیه ۳.۱ داریم $\chi'(G) = 4$ و لذا G کلاس ۲ است. □

حال می‌خواهیم قضیه کاربردی زیر را بیان کنیم که توسط شرایور[۱۷] در صفحه ۱۷۶۵ در [۱۹]، مطرح شده است.

قضیه ۴.۱. فرض کنید v رأسی از گراف G باشد به طوری که درجه رأس v و درجه تمامی همسایه‌هایش حداکثر k بوده و حداکثر درجه یکی از همسایه‌های رأس v دقیقاً k باشد. در این صورت اگر $G \setminus \{v\}$ دارای k-رنگ آمیزی یالی باشد، آن‌گاه گراف G نیز دارای k-رنگ آمیزی یالی است.

حال، با قرار دادن $k = \Delta(G)$ در قضیه قبل به نتیجه زیر می‌رسیم.

[۱۵] Class 1
[۱۶] Class 2
[۱۷] Schrijver

نتیجه ۵.۱. فرض کنید v رأسی از گراف G باشد به طوری که $|N_G(v) \cap V(G_\Delta)| \leq ۱$. اگر داشته باشیم $\chi'(G \setminus \{v\}) \leq \Delta(G)$، آن‌گاه گراف G کلاس ۱ است.

نتیجه ۵.۱، قضیه مشهور زیر که منسوب به فورنیر است را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۶.۱. [۱۲] در گراف دلخواه G، اگر G_Δ درخت باشد، آن‌گاه G کلاس ۱ است.

برهان. اثبات با استقراء روی $n = |G|$. اگر $n = ۱$، مسئله حل است. از آنجائی که G_Δ درخت است، رأس $v \in V(G_\Delta)$ وجود دارد که $|N_G(v) \cap V(G_\Delta)| \leq ۱$. گراف $G \setminus \{v\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $\Delta(G \setminus \{v\}) \leq \Delta(G) - ۱$، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۳.۱، $G \setminus \{v\}$ دارای $\Delta(G)$-رنگ آمیزی یالی است. در غیر این صورت، طبق فرض استقراء، $G \setminus \{v\}$ دارای $\Delta(G)$-رنگ آمیزی یالی می‌باشد. حال با استفاده از نتیجه ۵.۱، G کلاس ۱ است و قضیه اثبات می‌شود. □

گراف همبند G را بحرانی [۱۸] گویند اگر کلاس ۲ بوده و با حذف هر یال دلخواه کلاس ۱ شود.

مثال ۲.۱. تمامی دورهای مرتبه فرد بحرانی هستند.

در رابطه با بحرانی بودن یا نبودن بسیاری از گراف‌ها قضایای متعددی وجود دارد. برای مثال، در نظریه گراف‌ها و مبحث رنگ آمیزی یالی گراف‌ها، گراف‌هائی که تعداد یال‌هایشان نسبتاً زیاد باشد را مورد بررسی قرار می‌دهند. برای این منظور در مرجع [۲۰] ثابت شده است که هیچ گراف بحرانی زوج رأسی با $|G_\Delta| \leq ۵$ وجود ندارد.

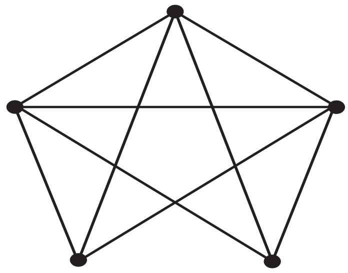
گراف G را لبریز [۱۹] می‌گویند هرگاه $|E(G)| > \lfloor \frac{|G|}{۲} \rfloor \Delta(G)$.

مثال ۳.۱. گراف نشان داده شده در شکل ۲.۱ گرافی لبریز است.

در رابطه با گراف‌های لبریز واضح است مرتبه هر گراف لبریز فرد است. همچنین لم زیر کلاس رنگی هر گراف لبریز را تعیین می‌کند.

لم ۷.۱. هر گراف لبریز کلاس ۲ است.

۱۸ Critical
۱۹ Overfull



شکل ۲.۱: گراف لبریز

برهان. با برهان خلف فرض می‌کنیم G گرافی لبریز و کلاس ۱ باشد. بنابراین یال‌های گراف G را می‌توان با رنگ‌های $۱, \ldots, \Delta(G)$ رنگ آمیزی یالی کرد. توجه می‌کنیم در رنگ آمیزی یالی هر گراف G، سایز هر کلاس رنگی حداکثر برابر $\lfloor \frac{|G|}{۲} \rfloor$ است. لذا تعداد یال‌های رنگ شده در رنگ آمیزی گراف G با $\Delta(G)$ رنگ، حداکثر برابر $\lfloor \frac{|G|}{۲} \rfloor \Delta(G)$ می‌باشد. اما از آنجائی که G گرافی لبریز است، $|E(G)| > \lfloor \frac{|G|}{۲} \rfloor \Delta(G)$. این مطلب نتیجه می‌دهد که تمامی یال‌های گراف رنگ نشده‌اند و به تناقض می‌رسیم. بنابراین هر گراف لبریز کلاس ۲ است. $\square$

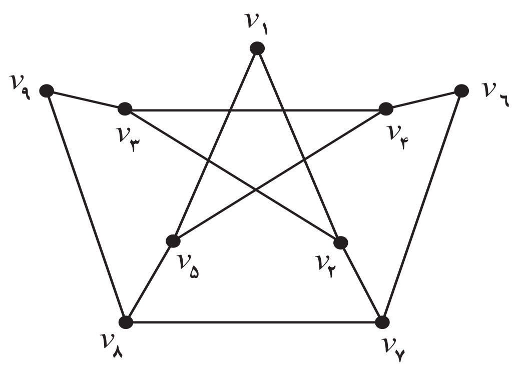
گراف G را می‌گوئیم در شرط لبریزی[۲۰] صدق می‌کند هرگاه دارای زیرگراف لبریز H باشد به طوری که $\Delta(G) = \Delta(H)$. واضح است که هر گراف دلخواهی که در شرط لبریزی صدق کند لبریز بوده و لذا کلاس ۲ می‌باشد. بنابراین شرط لبریزی شرطی کافی برای کلاس ۲ بودن یک گراف است. اما جالب اینجاست که این شرط، شرطی لازم نیست. برای دیدن این مطلب می‌توان گراف پترسن را در نظر گرفت که اگرچه گرافی کلاس ۲ است اما در شرط لبریزی صدق نمی‌کند. بر همین راستا، حدس زیر مطرح شده است.

حدس ۱.۱. [۸] فرض کنید G گرافی همبند بوده و $\Delta(G) > \frac{|V(G)|}{۳}$. در این صورت G کلاس ۲ است اگر و تنها اگر G در شرط لبریزی صدق کند.

برای اطلاعات بیشتر راجع به گراف‌های لبریز و شرط لبریزی، مراجع [۸، ۱۳] را ببینید.

تعیین کلاس ۱ یا کلاس ۲ بودن یك گراف در بحث رنگ آمیزی یالی گراف‌ها از دسته مسائل مشکل بوده و در واقع جزء مسائل NP-تمام می‌باشد، حتی زمانی که مسئله را محدود به تعیین کلاس گراف‌هائی کنیم که دارای ماکزیمم درجه ۳ هستند. برای این منظور مرجع [۱۸] را ببینید. بنابراین همیشه این مسئله به نوع خاصی از گراف‌ها محدود می‌شود. برای مثال، گونه‌ای از گراف‌ها برای این بررسی می‌توانند گراف‌هائی باشند که هسته‌شان ساختار خاصی دارد. بدین منظور می‌توان به مراجع [۵، ۷، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۲۳] مراجعه کرد.

[۲۰] Overfull condition



شکل ۳.۱: گراف P^*

در اینجا مروری بر قضایائی داریم که کلاس برخی از گراف‌ها را تعیین می‌کنند. برای مثال، ویزینگ در سال ۱۹۶۵ در [۲۳] ثابت کرد که اگر G_Δ حداکثر ۲ رأس داشته باشد، آنگاه G کلاس ۱ است. ۸ سال بعد، فورنیر در [۱۲] نتیجه ویزینگ را بدین صورت تعمیم داد که اگر G_Δ فاقد دور باشد، آنگاه G کلاس ۱ است. از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت که شرط لازم برای کلاس ۲ بودن یك گراف این است که هسته آن گراف شامل دور باشد. در همین رابطه هیلتون و ژائو در [۱۵، ۱۶] مسئله تعیین کلاس گراف‌هائی را در نظر گرفتند که هسته‌شان اجتماع مجزائی از دورهاست. در این رابطه آن‌ها تنها توانستند تعیین کنند که تعداد کمی از این گراف‌ها کلاس ۲ هستند. این گراف‌ها شامل گراف‌های لبریز و گراف P^* است که گراف P^* از حذف یك رأس گراف پترسن بدست می‌آید و در شکل ۳.۱ نشان داده شده است. همچنین آن‌ها حدس مهم زیر را در رنگ آمیزی یالی گراف‌ها مطرح کردند.

حدس ۲.۱. [۱۶] فرض کنید G گرافی همبند بوده و $\Delta(G_\Delta) \leq ۲$. در این صورت G کلاس ۲ است اگر و تنها اگر G لبریز بوده یا $G = P^*$.

در راستای حدس ۲.۱، قضایای زیادی مطرح شده‌اند. برای مثال در مرجع [۵]، قضیه زیر اثبات شده است که حدس را برای حالتی که $\Delta(G) = ۳$ ثابت می‌کند.

قضیه ۸.۱. فرض کنید G گرافی همبند باشد به طوری که $\Delta(G_\Delta) \leq ۲$، $\Delta(G) = ۳$ و $G \neq P^*$. در این صورت G کلاس ۱ است.

همچنین در مرجع [۸]، قضیه زیر به اثبات رسیده است که حدس را برای حالتی که $|G_\Delta| = ۳$ ثابت می‌کند.

قضیه ۹.۱. فرض کنید G گرافی همبند با سه رأس از ماکزیمم درجه باشد. در این صورت G کلاس ۲ است اگر

و تنها اگر nای وجود داشته باشد به طوری که گراف G از گراف K_{2n+1} با حذف $n-1$ یال مستقل بدست آمده باشد.

دو قضیه زیر شرایطی را بیان می‌کنند که تحت آن‌ها گراف G با چهار رأس از ماکزیمم درجه کلاس ۱ است.

قضیه ۱۰.۱. [۶] فرض کنید G گرافی زوج رأسی، ۲- همبند یالی با چهار رأس از ماکزیمم درجه باشد. در این صورت G کلاس ۱ است.

قضیه ۱۱.۱. [۶] فرض کنید G گراف $2n+1$ رأسی، ۲- همبند یالی با چهار رأس از ماکزیمم درجه باشد. در این صورت G کلاس ۲ است اگر و تنها اگر $|E(G)| \geq n\Delta(G)+1$.

قضیه زیر شرایط حدس ۲.۱ را برای زمانی که $|G_\Delta| = 5$ بررسی می‌کند.

قضیه ۱۲.۱. [۲۱] فرض کنید G گرافی همبند و بحرانی بوده به طوری که $\Delta(G) \geq 3$. همچنین فرض کنید G دارای $2n+1 \geq 7$ رأس بوده و $|G_\Delta| = 5$. در این صورت داریم، $|E(G)| = n\Delta(G)+1$.

همان طور که اشاره کردیم در راستای حدس ۲.۱، قضایای بسیار زیاد و مهمی مطرح شده است. هدف از تنظیم این رساله، بیان یك سری قضایا و نتایج در رابطه با این حدس و مقایسه آن‌ها با قضایای بدست آمده توسط افراد دیگر می‌باشد. برای این منظور ابتدا می‌خواهیم صورت ساده‌تری از حدس را مطرح کنیم و لذا به لم زیر احتیاج داریم.

لم ۱۳.۱. گراف P^* کلاس ۲ است.

برهان. با برهان خلف فرض می‌کنیم $\chi'(P^*) = \Delta(P^*) = 3$. سپس بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $c(v_1v_2) = c(v_3v_4) = 1$، $c(v_2v_3) = c(v_4v_5) = 2$ و $c(v_1v_5) = 3$. در این صورت $c(v_2v_7) = c(v_3v_9) = 3$ و $c(v_5v_8) = 1$ که نتیجه می‌دهد $c(v_7v_8) = c(v_8v_9) = 2$ که تناقض است.
بنابراین نتیجه می‌شود P^* گرافی کلاس ۲ است. □

توجه می‌کنیم از لم ۷.۱، می‌دانیم هر گراف لبریز کلاس ۲ است. بنابراین بنابر لم قبل و این نکته می‌دانیم طرف عکس حدس برقرار است. پس می‌توان صورت ساده‌تر شده حدس را به صورت زیر بیان کرد.

حدس ۳.۱. فرض کنید $G \neq P^*$ گرافی همبند و کلاس ۲ بوده به طوری که $\Delta(G_\Delta) \leq 2$. در این صورت G لبریز است.

حال می‌خواهیم حدس ۳.۱ را برای گراف‌های زوج رأسی بررسی کنیم. از آنجائی‌که می‌دانیم هر گراف زوج رأسی لبریز نیست، با اضافه کردن فرض زوج رأسی بودن برای گراف G در حدس ۳.۱، به حالت خاصی از حدس می‌رسیم که در زیر بیان شده است.

حدس ۴.۱. فرض کنید G گرافی همبند و زوج رأسی بوده به طوری که $\Delta(G_\Delta) \leq 2$. در این صورت G کلاس ۱ است.

همان‌طور که اشاره کردیم هدف از تنظیم این رساله، بیان نتایجی در راستای حدس ۴.۱ که صورت ساده‌تر شده حدس ۲.۱ است. برخی از این نتایج بدست آمده در رابطه با حدس ۴.۱ در مقالات [۱]، [۲] و [۳] بیان شده است. برای بیان چنین نتایجی به چند قضیه که در زیر آمده‌اند احتیاج داریم. ابتدا به قضیه زیر اشاره می‌کنیم که نقش بسیار کلیدی را در اثبات قضایای مهم این رساله دارد.

قضیه ۱۴.۱. [۱۵] فرض کنید G گرافی همبند و کلاس ۲ بوده به طوری که $\Delta(G_\Delta) \leq 2$. در این صورت داریم:

(۱) G بحرانی است؛

(۲) G_Δ اجتماع مجزائی از دورهاست؛

(۳) $\delta(G) = \Delta(G) - 1$، مگر اینکه G دور فرد باشد.

قضیه ۱۵.۱. [۱۵] فرض کنید G گرافی بحرانی باشد. در این صورت هر رأس از گراف G با حداقل دو رأس از رئوس G_Δ مجاور است.

در رابطه با تعداد رئوس هسته هر گراف بحرانی قضیه زیر مطرح شده است که در اثبات لم ۷.۲ نقش مهمی را بازی می‌کند.

قضیه ۱۶.۱. [۲۴] فرض کنید G گرافی بحرانی بوده و $\Delta(G) \geq 4$. در این صورت داریم،

$$n_\Delta \geq 2 \sum_{j=2}^{\Delta(G)-1} \frac{n_j}{j-1} + \frac{1}{2} n_3,$$

که در آن n_j تعداد رئوس از درجه j در گراف G است.

فصل ۲

نتایجی در رنگ آمیزی یالی گراف‌ها

در این فصل قصد داریم حدس ۴.۱ را برای انواع خاصی از گراف‌ها ثابت کنیم. این گراف‌ها شامل گراف‌های دارای برش یالی خاص و همچنین گراف‌هائی که هسته‌شان دارای ساختار خاصی مثلاً اجتماعی از دورها و درخت‌ها می‌باشند، هستند. در ابتدا در بخش ۱.۲، گراف‌هائی که دارای برش یالی خاصی هستند را در نظر می‌گیریم.

۱.۲ گراف‌های دارای برش یالی خاص

قضیه ۱.۲. [۱] فرض کنید G گرافی همبند بوده و $\Delta(G_\Delta) \geq ۲$. اگر G دارای یك برش یالی از سایز حداکثر $\Delta(G) - ۲$ باشد که به صورت تطابق یا ستاره است، آن‌گاه G کلاس ۱ است.

برهان. بنابر فرض، یک برش یالی مینیمال F که به صورت تطابق یا ستاره است و $|F| = s \leq \Delta(G) - ۲$ وجود دارد. از آنجائی که F مینیمال است، $G \setminus F$ دارای دقیقاً دو مؤلفه به نام‌های $G_۱$ و $G_۲$ می‌باشد. مجدداً طبق فرض مینیمال بودن F در گراف G، می‌توان نتیجه گرفت هر یال F دارای یک سر در $G_۱$ و سر دیگر در $G_۲$ می‌باشد. حال تعریف می‌کنیم

$$V(G_۱) \cap V(F) = \{u_۱, \ldots, u_k\},\ V(G_۲) \cap V(F) = \{v_۱, \ldots, v_k\}.$$

دو حالت پیش می‌آید:

ابتدا فرض می‌کنیم F یك تطابق باشد. گراف $G \setminus F$ را در نظر می‌گیریم. دو رأس جدید $x_۱$ و $x_۲$ را به گراف $G \setminus F$ اضافه کرده و برای هر i، $۱ \leq i \leq k$، $x_۱$ را به u_i و $x_۲$ را به v_i وصل می‌کنیم. سپس زیر گراف القائی روی رئوس $V(G_۱) \cup \{x_۱\}$ را با $H_۱$ و زیر گراف القائی روی رئوس $V(G_۲) \cup \{x_۲\}$ را با $H_۲$ نمایش می‌دهیم. توجه می‌کنیم از آنجائی که $G_۱$ و $G_۲$ گراف‌هائی همبند هستند، $H_۱$ و $H_۲$ نیز گراف‌هائی همبند