بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ی علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان:

فضای زیر گروههای یک گروه فشرده

از:

نغمه اخوان

استاد راهنما:

دکتر حسین سهله

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللهَ عزّ و جلّ: "

از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر حسین سهله که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

و از استادان فرزانه و دلسوز؛ جناب آقایان دکتر اسماعیل انصاری و دکتر عباس سهله که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

فهرست مطالب

چکیده :

فضای زیر گروههای یک گروه فشرده

نغمه اخوان

در این رساله نظریه ی خانواده ی زیر گروههای بسته ی یک گروه توپولوژیک فشرده با استفاده از مفهوم توپولوژیکی ابر فضا توسعه یافته است . ویژگیهای پایه ای این " فضای زیر گروهها " بررسی می شود .

کلید واژه :

ابر فضا، گروه توپولوژیک، تناظر، تئوری گالوا، فشردگی دوگونجی، k-متریک پذیری.

Abstract:

On the space of subgroups of a compact group
Naghmeh Akhavan

A theory of the family of closed subgroups of a compact topological group is developed, using the topological notion of a hyperspace. Basic properties of this " space of subgroups " are explored.

Keywords:

Hyperspace, Topological group, Duality, Galois theory, Dugundji compactness, k-metrisability.

علائم (نماد های) اختصاری

ω	اولین اوردینال نا متناهی
ω_1	اولین اوردینال ناشمارا
$\aleph_0$	اولین کاردینال نا متناهی
χ	مشخصه ی فضای توپولوژیکی
W	وزن فضای توپولوژیکی
$\cong$	یکریختی توپولوژیکی
$\mathbb{N}$	مجموعه ی اعداد طبیعی
$\mathbb{R}$	مجموعه ی اعداد حقیقی
$\mathbb{Z}$	مجموعه ی اعداد صحیح
$\mathbb{C}$	مجموعه ی اعداد مختلط
I	بازه ی $[0,1]$
$\langle\ \rangle$	زیر گروه تولید شده
$Aut(F)$	گروه خودریختی های F
$W(X)$	وزن X
$(\chi(x,X)),\chi(X)$	مشخصه ی (موضعی x در) X
$\chi(A,X)$	مشخصه ی A در X
$\lvert X\rvert$	کاردینال (- یته یا عدد اصلی) X
$\lim_{\leftarrow}$	حد معکوس

مقدمه :

در این پایان نامه که بر اساس [8] می باشد، یک روند جدید برای بررسی ساختار گردایه ی زیرگروههای بسته ی یک گروه توپولوژیک مطرح می شود. در این روش از مفهوم توپولوژیکی ابر فضاها استفاده می گردد. اگر چه این تئوری بیشتر برای گروههای فشرده بکار می رود اما بسیاری از نتایج آن برای گروههای هم متناهی نیز ثابت می شوند.

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $K\left(X\right)$ گردایه ی همه ی زیر مجموعه های فشرده ی نا تهی از X باشد. توپولوژی های مختلفی می توان روی $K\left(X\right)$ تعریف کرد که آن را تبدیل به یک " ابر فضا " کند. یکی از این توپولوژیها، توپولوژی استاندارد و دیگری توپولوژی ویتوریس است. برای جزئیات بیشتر به [3] مراجعه شود.

یک گروه توپولوژیک فشرده ی G را در نظر می گیریم. زیر فضاهای $K\left(G\right)$ عبارتند از: $S\left(G\right)$ فضای زیر گروه G، $C\left(G\right)$ فضای همدسته های G و $N\left(G\right)$ فضای زیر گروههای نرمال G.

در فصل اول بعضی از نتایج بنیادی این فضاها مانند : نشاننده های فضاهای زیر گروه، ثابت های کاردینال وپایداری نمایش های تصویری، بررسی شده اند. همچنین در فصل دوم با استفاده از تناظر پونتری آگین و تئوری گالوا خواص فضای زیر گروههای بسته ی گروه آبلی فشرده بر حسب زیر گروههای گروههای آبلی گسسته را بررسی می کنیم. بُعد فضای زیر گروه تولید شده از دو گروه را تجزیه و تحلیل می کنیم و در پایان فضای زیر گروه بعضی از گروههای فشرده را محاسبه می کنیم.

گروههای فشرده ی توپولوژیک خاصیت خیلی قوی فشرده ی دوگونجی را دارد [9]. درفصل سوم، نتایج، دو خاصیت فشردگی دوگونجی و K - متریک پذیری را بررسی می کنیم. این نتایج روی همئو مورفیسم های فضای زیر گروه های یک گروه هم متناهی، توسط گارتساید و اسمیت ناکامل اما گسترده طبقه بندی و ساخته شده است [9].

لازم به ذکر است که در این پایان نامه همه ی تعریف ها، لم ها، قضایا و نتایج، شماره ی متوالی دارند. بعنوان مثال، در بخش ۳ از فصل اول، چهارمین عنوان دارای شماره ی۱-۳-۴ می باشد.

فصل صفر: پیش نیاز

در این فصل تعاریف لازم برای فصول بعد مانند مشخصه، وزن، گروههای هم متناهی($profinite$) و همچنین توپولوژی هایی مانند: فشرده – باز، ویتوریس ($vietoris$)، زیر فضایی، . . . بیان شده است.

۰-۱ پیش نیاز

تعریف ۰-۱-۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $x \in X$ اگر $\{x\}$ در X باز باشد. در این صورت x را نقطه ی تنهای X گوییم . $[7]$

تعریف ۰-۱-۲. فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد. مجموعه ی $A \subseteq X$ را G_δ - مجموعه گویند هرگاه A اشتراک شمارایی از مجموعه های باز باشد. $[21]$

تعریف ۰-۱-۳. فضای توپولوژیک X را فضای هاسدورف گوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه ی متمایز x_1 و x_2 از X، همسایگی هایی مانند U_1 و U_2 به ترتیب، از x_1 و x_2 یافت شوند که از هم جدا باشند. $[21]$

تعریف ۰-۱-۴. گوییم فضای X در نقطه ی x پایه ی شمارا دارد هرگاه گردایه ی شمارایی از همسایگی های x مانند β موجود باشد بطوریکه هر همسایگی x دست کم حاوی یک عضو این گردایه باشد. اگر فضایی در هر نقطه اش یک پایه ی شمارا داشته باشد گوییم در اولین اصل شمارایی صدق می کند. $[21]$

مثال۰-۱-۵. واضح است که هر زیر مجموعه ی باز X یک مجموعه ی G_δاست. در یک فضای هاسدورف شمارای نوع اول، هر زیر مجموعه ی تک عضوی یک مجموعه ی G_δ است. $[21]$

تعریف۰-۱-۶. یک فضای توپولوژیک را پراکنده گوییم هرگاه هر زیر فضای ناتهی آن دارای یک نقطه ی تنها باشد. $[7]$

مثال ۰-۱-۷. مجموعه ی کانتور شامل هیچ نقطه ی تنها نمی باشد. بطور واضح هر فضای گسسته یک فضای پراکنده می باشد.$[21]$

قضیه۰-۱-۸. در فضای هاسدورف X هر مجموعه ی متناهی بسته است.

اثبات : رجوع شود به $[21]$.

تعریف۰-۱-۹. هرگاه توپولوژی فضای X دارای پایه ی شمارا باشد گوییم X در دومین اصل شمارایی صدق می کند. $[21]$

تعریف ۰-۱-۱۰. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. X یک فضا T_1 است اگر برای هر دو نقطه ی مجزای a و b در X همسایگی های U و Vوجود دارند که $a \in U, b \notin U$ و $b \in V, a \notin V$. $[21]$

توجه ۰-۱-۱۱. X یک فضای T_1 است اگر و تنها اگر هر زیر مجموعه ی تک عضوی آن بسته باشد. $[21]$

مثال ۰-۱-۱۲. هر فضای هاسدورف T_1 است. هر فضای گسسته هاسدورف است. $[21]$

تعریف ۰-۱-۱۳. فضای یکنواخت (X,φ)عبارتست از مجموعه ی X مجهز به خانواده ی غیر تهی از زیر مجموعه های حاصلضرب دکارتی $X \times X$ (φ را ساختار یکنواخت یا یکنواختی از X و عضوهایش را پیرامون (*entourage*)گویند.) که در شرایط زیر صدق می کند :

(۱) اگر U در φ باشد . آنگاه U شامل قطر $\Delta = \{(x,x); x \in X\}$.

(۲) اگر U در φ باشد و V یک زیر مجموعه از $X \times X$ که شامل U است آنگاه V در φ است.

(۳) اگر Uو V در φ باشند آنگاه $U \cap V$ در φ است.

(۴) اگر Uدر φباشد آنگاه وجود دارد V در φ بطوریکه، هرگاه (x,y) و (y,z) در V باشند آنگاه (x,z) در U است.

(۵) اگر U در φ باشد آنگاه $U^{-1} = \{ (y,x) : (x,y)$ در Uاست$\}$ نیز در φاست. $[16]$

- برای تعریف یک رابطه ی نزدیکی بین دو مجموعه، ساختار توپولوژیکی خیلی ضعیف است و مجبوریم از ساختار یکنواخت استفاده کنیم:

تعریف ۰-۱-۱۴. دریک فضای یکنواخت زیرمجموعه های A و B را نزدیک به هم می نامیم اگر برای هر پیرامون U داشته باشیم، $(A \times B) \cap U \neq \phi$. $[16]$

تعریف۰-۱-۱۵. به ازای گروه مفروض Gو فضای X، یک عمل G بر X تابعی است که به هر عضو α از G، نگاشتی پیوسته مانند $h_\alpha : X \to X$ به طریقی نظیر می کند که :

(۱) اگر e عضو خنثی G باشد آنگاه h_e نگاشت همانی روی X است .

(۲) اگر $\alpha = \beta.\gamma$ آنگاه $h_\alpha = h_\beta o h\gamma$. $[21]$

تعریف۰-۱-۱۶. به ازای یک عمل مفروض G بر X، فضای $\left(X/G\right)$را این طور تعریف می کنیم: X/G فضای خارج قسمتی Xاست که با رابطه ی هم ارزی ذیل مشخص می شود: $x \sim x'$ در صورتیکه α ای در G وجود داشته باشد $x' = h_\alpha(x)$. [21]

تعریف ۰-۱-۱۷. گوییم گردایه ی ζ از زیر مجموعه های فضای X دارای مرتبه ی $m+1$ است هرگاه نقطه ای از X در $m+1$ عضو ζ واقع شود و هیچ نقطه ی X در بیشتر از $m+1$ عضو ζ واقع نباشد.[21]

تعریف۰-۱-۱۸. اگر Uو V پوشش روی X باشند گوییم U تظریف V است اگر و تنها اگر هر $u \in U$ مشمول در بعضی $v \in V$ باشد. [21]

تعریف ۰-۱-۱۹. فضای X را با بعد متناهی خوانیم هرگاه عددی صحیح مانند m وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر پوشش باز Xمانند ζ پوششی باز برای X مانند β موجود باشد که ζرا ظریف کند و مرتبه ی آن حداکثر $m+1$ باشد.

بنا به تعریف فوق، بعد توپولوژیک X کوچکترین مقداری از m است که به ازای آن حکم بالا برقرار است. [21]

تعریف ۰-۱-۲۰. فضای توپولوژیک X، 0 - بعدی گوییم اگر X فضای T_1 ، غیر تهی و دارای یک پایه باشد که اعضای آن هم باز و هم بسته اند. [14]

تعریف۰-۱-۲۱. فضای X را در نقطه ی x فشرده ی موضعی گوییم هرگاه زیر مجموعه ی فشرده ای از X مانند C موجود باشد که حاوی یک همسایگی x است. [21]

مثال۰-۱-۲۲. فضای $\mathbb{R}^n$ فشرده ی موضعی است. [21]

تعریف ۰-۱-۲۳. فضای توپولوژیک هاسدورف X را فشرده ی موضعی گوییم اگر برای هر $x \in X$ و هر مجموعه ی باز U شامل x، یک مجموعه ی باز w با بستار فشرده موجود باشد. بطوریکه $x \in w \subseteq \overline{w} \subseteq U$. [14]

تعریف ۰-۱-۲۴. در فضای مفروض X، رابطه ی هم ارزی $\sim$را چنین تعریف می کنیم:

$x \sim y$ هرگاه زیر مجموعه ی همبندی وجود داشته باشد که شامل هر دوی xو y باشد.

رده های هم ارزی حاصل از آن را مؤلّفه ها (یا مولفه های همبند) X می خوانند.[21] ئ

تعریف ۰-۱-۲۵. فضای توپولوژیک X را کلا ناهمبند گوییم هرگاه مولفه های فضا تک نقطه ای ها باشند. [21]

مثال ۰-۱-۲۶. اعداد گویا و اعداد گنگ، کلاناهمبند هستند. [21]

مثال۰-۱-۲۷. هر فضای گسسته، کلا نا همبند است. [21]

توجه ۰-۱-۲۸. فضاهای کلا ناهمبندی وجود دارند که گسسته نیستند. مانند فضای اعداد گویا. [21]

لم ۰-۱-۲۹. زیر فضا و حاصلضرب فضای کلا ناهمبند خود کلا ناهمبند است. [21]

تعریف ۰-۱-۳۰. یک عدد در مبنای p ، به فرم $\sum_{k=m}^{\infty} a_k p^k$ را عدد صحیح درمبنای p گوییم هرگاه $m \geq 0$ ، a_k ها اعداد صحیح و p اول باشد، که در آن a_k را مجموعه ی $\{0,1,...,p-1\}$ در نظر می گیریم.

بطور معادل، یک عدد صحیح در مبنای p عضوی از حد معکوس حلقه های $\frac{\mathbb{Z}}{p^k\mathbb{Z}}$ برای $k \geq 0$ می باشد. [25]

تعریف ۰-۱-۳۱. مشخصه ی اعضای یک مجموعه مانند S را کاردینال S گویند و با $|S|$ نمایش می دهند.

$\aleph_0$: کوچکترین کاردینال نامتناهی شمارا ست. [17]

تعریف ۰-۱-۳۲. مشخصه ی یک فضای توپولوژیکی X در نقطه ی x برابر است با:

$\chi(X,x) = \aleph_0 + \min\{|\beta_x| :$ پایه ای برای x در X است $\beta_x\}$

مشخصه ی فضای X:

$$\chi(X) = \sup\{\chi(X,x); x \in X\}$$

نکته ۰-۱-۳۳. X شمارای نوع اول است اگر و تنها اگر $\chi(X) = \aleph_0$.

اثبات : فرض کنیم X شمارای نوع اول باشد. پس در نقطه ی $x \in X$ پایه ی شمارا دارد. بنا براین :

$$\chi(X) = \sup\{\chi(X,x); x \in X\} = \aleph_0$$

برعکس : اگر $\chi(X) = \aleph_0$ داریم $\sup\{\chi(X,x); x \in X\} \leq \aleph_0$ یعنی در هر $x \in X$ با توجه به اینکه $\aleph_0 \leq \chi(X,x) \leq \aleph_0$ بنا بر این $\aleph_0 + \min\{|\beta_x| : x \in X\} \leq \aleph_0$ آنگاه $\min\{|\beta_x| : x \in X\} \leq \aleph_0$ پس برای هر $x \in X$ که β_x پایه ی شمارا در $x \in X$ است. در نتیجه X شمارای نوع اول است. [17]

تعریف۰-۱-۳۴. مشخصه ی عددی وزن روی فضای توپولوژیکی X برابر است با:

$W(X) = \aleph_0 + \min\{|\beta| :$ پایه ای برای X است $\beta\}$

نکته۰-۱-۳۵. X شمارای نوع دوم است اگر و تنها اگر $W(X)=\aleph_0$.

اثبات : فرض کنیم X شمارای نوع دوم باشد پس X دارای پایه ی شمارا می باشد. بنا براین $\min\{|\beta|\}\leq\aleph_0$ اگر و تنها اگر $W(X)=\aleph_0$.[17]

تعریف ۰-۱-۳۶. نگاشت $f:X\to Y$ را نگاشت باز گوییم هرگاه به ازای هر زیر مجموعه ی باز X مانند U، مجموعه ی $f(U)$ در Y باز باشد.[26]

تعریف ۰-۱-۳۷. زیر فضای A از X را یک توکشیده ی X گوییم هرگاه نگاشتی پیوسته مانند $r:X\to A$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر عضو A مانند a، $r(a)=a$.

نگاشت r را توکشنده ی X بروی A می نامیم. [21]

تعریف ۰-۱-۳۸. فرض کنیم $X\subseteq[0,\infty]$. تابع f ، نیم پیوسته ی بالایی گفته می شود اگر برای هر $x_0\in X$ و هر $\varepsilon\succ 0$ یک همسایگی U از x_0 وجود دارد بطوریکه $f(x)\leq f(x_0)+\varepsilon$ برای هر $x\in U$.

مجموعه ی همه ی توابع نیم پیوسته ی بالایی را با R^+ نشان می دهیم.[1]

قضیه (قضیه ی پیوستگی تابع معکوس) ۰-۱-۳۹. اگر f تابعی پیوسته و یک به یک بر فضای متری و فشرده ی X به توی Y باشد. در این صورت تابع معکوس $f^{-1}:f(X)\to X$ پیوسته است.

توپولوژی فشرده – باز

تعریف ۰-۱-۴۰. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. اگر C زیر مجموعه ی فشرده ای از X و U زیر مجموعه ی بازی از Y باشد، آنگاه $S(C,U)$ را چنین تعریف می کنیم :

$$S(C,U)=\{f\,|\,f\in\zeta(X,Y),\,f(C)\subseteq U\}$$

مجموعه های $S(C,U)$ تشکیل زیر پایه ای برای یک توپولوژی روی همه ی توابع پیوسته از X به Y، $\zeta(X,Y)$، می دهند، که به توپولوژی فشرده – باز مرسوم است.[21]

توپولوژی ویتوریس (*Vietoris topology*)

تعریف ۰-۱-۴۱. توپولوژی ویتوریس روی مجموعه ی همه ی زیر مجموعه های غیر تهی از فضای توپولوژیک X تعریف می شود. برای هر n - تایی، $U_1,\dots,U_n$ از مجموعه های باز در X ، مجموعه ی پایه شامل همه ی زیر مجموعه هایی چون U_i بطوریکه $\left(\bigcup_{i\neq j} U_i\right)\bigcap U_i \neq \phi$ می باشند ساخته می شود. [1]

توپولوژی زیر فضایی

تعریف۰-۱-۴۲. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک با توپولوژی τ باشد. اگر Y زیر مجموعه ای از X باشد، گردایه ی $\tau_Y=\left\{Y\bigcap U \middle| U\in\tau\right\}$ یک توپولوژی در Y است و به توپولوژی زیر فضایی مرسوم است. با این توپولوژی Y را یک زیر فضای X می گویند؛ مجموعه های باز این توپولوژی عبارت اند از همه ی مقاطع مجموعه های باز X با Y. [21]

تعریف ۰-۱-۴۳. فضای توپولوژیک (Y,τ) فضای متریک پذیر نامیده می شود اگر توپولوژی اش به وسیله ی یک متر در Y القا شده باشد. [21]

قضیه۰-۱-۴۴.(Birkhoff & kakutani) یک گروه توپولوژیک G متریک پذیر است اگر و تنها اگر هاسدورف و همانی e از G دارای همسایگی اساسی شمارا باشد. [29]

تعریف۰-۱-۴۵. تابع f را نشاننده (محاط شده) گوییم هرگاه یک به یک و f از X روی تصویر خود تابعی همئومورفیسم باشد. [21]

گروههای توپولوژیک

تعریف ۰-۱-۴۶. فرض کنید G یک گروه و همچنین یک فضای توپولوژیک است. فرض کنید :

(i) نگاشت $(x,y)\mapsto xy$ از $G\times G$ به توی G نگاشت پیوسته از ضرب دکارتی $G\times G$ به توی G است.

(ii) نگاشت $x\mapsto x^{-1}$ از G به توی G پیوسته است.

آنگاه G را یک گروه توپولوژیک می نامند. [14]

مثال ۰-۱-۴۷. $(\mathbb{Z},+)$ با توپولوژی گسسته یک گروه توپولوژیک است.

$(\mathbb{R},+)$ با توپولوژی استاندارد یک گروه توپولوژیک است.

$(\mathbb{R}^{+},\times)$ با توپولوژی استاندارد یک گروه توپولوژیک است.

$\left(\dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}},\times\right)$ با توپولوژی زیر فضایی یک گروه توپولوژیک است. [21]

تعریف۰-۱-۴۸. گیریم G یک گروه توپولوژیک با همانی e باشد. اگر A و B زیر مجموعه هایی از G باشند، قرار می دهیم :

$AB=\{ab:a\in A,b\in B\}$ و $A^{-1}=\{a^{-1}:a\in A\}$. [14]

قضیه ۰-۱-۴۹. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک، A و B زیر مجموعه هایی از G باشند. اگر A باز و B دلخواه باشند. آنگاه AB و BA بازند. اگر A و B فشرده آنگاه AB فشرده است. اگر A بسته و B فشرده آنگاه AB و BA بسته اند. اگر A و B بسته آنگاه لزوما AB بسته نیست.

اثبات : رجوع شود به [14].

لم ۰-۱-۵۰. گیریم $(G,\bullet)$ یک گروه توپولوژیک باشد و یک α عضو G باشد. توابع $f_\alpha,g_\alpha:G\to G$ ، به ترتیب تعریف شده به وسیله ی $f_\alpha(x)=\alpha x$ و $g_\alpha(x)=x\alpha$ همئومورفیسم هایی از G می باشند.

نگاشت $\varphi:G\to G$ ، $g\mapsto g^{-1}$، یک نگاشت همئومورفیسم است. زیرا $\varphi o\varphi=Id_G$.

بخاطر آورید که فضای G فضای توپولوژیک همگن است هرگاه برای هر جفت نقاط $x,y\in X$ وجود داشته باشد هومومورفیسم f از X به روی خودش بطوریکه $f(x)=y$. [29]

توجه۰-۱-۵۱. بنا به لم ۰-۱-۵۰ هر گروه توپولوژیک یک فضای همگن است. در نتیجه یک فضای توپولوژیک لزوما یک گروه توپولوژیک نیست.