بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc)

گرایش : فیزیک هسته ای

عنوان : تحلیل خاصیت دوگانگی موجی ذره ای با استفاده از فضای مختلط

استاد راهنما : دکتر فرین پاینده

استاد مشاور : دکتر حبیب خلیل پور

پژوهشگر : فاطمه میری

زمستان ۱۳۹۱

تقدیم به :

پدر و مادر عزیز و مهربانم

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بیکران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم .امروز هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شماست باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید .

بوسه بر دستان پرمهرتان

و

همسرعزیزم

که نشانه لطف الهی در زندگی من است.

تشکر و قدردانی :

ازاستادارجمندم‌سرکارخانم‌دکترفرین‌پاینده به دلیل یاریها و راهنماییهای بی‌چشمداشت ایشان، که بسیاری از سختیها را برایم آسان نمودند.

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب فاطمه میری دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد نا پیوسته به شماره دانشجویی ۸۸۰۸۳۸۳۳۳۰۰ در رشته فیزیک هسته ای که در تاریخ ۹۱/۱۱/۹ از پایان نامه خود تحت عنوان: تحلیل خاصیت دوگانگی موجی ذره ای با استفاده از فضای مختلط با کسب نمره ۵۰/ ۱۶ ودرجه بسیار خوب دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم:

۱- این پایان نامه حاصل تحقیق وپژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده ودر مواردی که از دستاوردهای علمی وپژوهشی دیگران(اعم از پایان نامه، کتاب ، مقاله و........) استفاده نموده ام، مطابق ضوابط و رویه های موجود، نام منبع مورد استفاده وسایر مشخصات آن را در فهرست ذکر ودرج کرده ام.

۲- این پایان نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی(هم سطح،پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه ها ومؤسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

۳- چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و.... از این پایان نامه داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

٤- چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط ومقررات رفتار نموده ودر صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام ونام خانوادگی:

تاریخ وامضاء:

بسمه تعالی

در تاریخ ۹۱/۱۱/۹

دانشجــوی کارشناسی ارشد آقای / خانم فاطمه میری از پایان نامه خود دفــاع نمــوده و بــا نمــره ....۱۶/۵۰.. بحــروف شانزده و نیم و بــا درجــه بسیار خوب مورد تصویــب قــرار گرفت.

امضاء استاد راهنما

حرکت ذره در فضای مختلط علت به وجود آمدن فریزهای تداخلی و تعبیر احتمالی تابع موج را به وضوح دریافت.

نظر استاد راهنما برای چاپ در پژوهش نامه دانشگاه مناسب است ☐ تاریخ و امضاء:

مناسب نیست ☐

فهرست مطالب

چکیده

از آن جایی که اصل کوانتش $P \to \hat{P} = -i\hbar\nabla$ هسته‌اصلی‌درساختن‌سیستم‌های کوانتومی مکانیکی است با این حال، این اصل تاکنون بدون هیچ گونه اثبات رسمی درباره ریشه و اعتبار آن، و تنها با استفاده از، نظریه اساسی مکانیک ارائه شده است. در این جا می‌خواهیم نشان دهیم که عملگرهای کوانتومی، ریشه در فضا - زمان مختلط دارند و می توانند به طور طبیعی از معادلات حرکت هامیلتونی تعمیم یافته به فضای مختلط به دست آیند. اثبات عملگرهای کوانتومی از مکانیک هامیلتونی، مستقل از مختصات بوده و لذا ما را قادر می سازد تا بتوانیم، عملگرها را مستقیما از هر فضا- زمان خمیده ای، بدون تبدیل دوباره به فضای دکارتی به دست آوریم.

هدف این رساله، بررسی و توجیه این واقعیت است که توصیف ذره ای علّی برای یک ذره آزاد می تواند با توصیف موجی احتمالی آن در فضای مختلط آشتی داده شود، بدین منظور، کافی است نشان دهیم که، حرکت موجی همراه با یک ذره مادی، صرفاً ناشی از مشاهده تصویر حرکت ذره، در فضای مختلط برروی فضای حقیقی است. برای تایید این تعبیر جدید نخست معادله حرکت برای ذره متحرک در فضای مختلط را به دست آورده و از حل آن می توان نشان داد که، اندرکنش بین حرکت حقیقی و حرکت موهومی ذره می تواند منجر به مشاهده حرکت موجی ذره ای در فضای مختلط گردد. معادله حرکت به دست آمده برای ذره آزاد نیز نشان می دهد که، یک ذره به اصطلاح آزاد، تنها از پتانسیل کلاسیکی آزاد بوده ولی از پتانسیل مختلط آزاد نیست و با توجه به کنش این پتانسیل کوانتومی مختلط یک ذره آزاد می تواند با حفظ خصلت ذره ای اش بر روی مسیر کلاسیکی خود هم به راست و هم به چپ حرکت کرده و مابین این دو مسیر طوری نوسان نماید که موجب یک حرکت موجی غیرموضعی گردد. با بررسی شرایط انتشار، می توان تعیین نمود که چه هنگام ذره حرکت کلاسیکی خود را دنبال می کند و چه هنگام حرکت موجی کوانتومی اش را و نیز بر اساس تفسیر

جدید می توان، از بررسی حرکت ذره در فضای مختلط علت به وجود آمدن فریزهای تداخلی و تعبیر احتمالی تابع موج را به وضوح دریافت.

مقدمه

در پایان قرن نوزدهم به نظر می‌رسیدکه بیشتر از آنچه که باید درباره فیزیک بدانیم پی برده ایم، دینامیک نیوتونی بارها به دقت آزموده شده بود و موفقیت آن، معیاری از درک عمیق و منسجم طبیعت به شمار می رفت. الکتریسیته و مغناطیس، بر اثر کار تجربی ماکسول وحدت یافته بودند و هرتز در آزمایشهای خود، امواج الکترومغناطیسی را که معادله های ماکسول پیش بینی کرده بودند کشف و بررسی کرده بود. قانونهای ترمودینامیک و نظریه جنبشی در ارائه توصیفی واحد، در گستره وسیعی از پدیده ها کاملا موفق بودند.

نخستین نشانه نارسایی تصویر موج کلاسیک تابش‌الکترومغناطیسی(که به خوبی از عهده توضیح آزمایشهای یانگ‌وهرتز در قرن نوزدهم برآمده بود و به دقت با معادله های ماکسول قابل تحلیل بود) ناشی از شکست این نظریه، در توضیح طیف مشاهده شده تابش گرمایی بود. از طرفی، در فیزیک کلاسیک، قانون های حاکم بر ویژگی های موجی و ذره ای تفاوتی بنیادی دارند. پرتابه ها از قوانین مربوط به ذرات، مانند مکانیک نیوتونی، پیروی می کنند امواج دست خوش تداخل و پراش می‌شوند که نمی توان آن ها را با مکانیک نیوتونی مربوط به ذرات توضیح داد، هر ذره(مثلا یک پرتابه) حامل انرژی است که در ناحیه کوچکی از فضا محدود شده است، از سوی دیگر موج انرژی خود را در جبهه های موج در سرتاسر فضا پخش می‌کند.

نظریه‌کوانتومی، اگرچه باید با برهم کنش های ذرات سروکار داشته باشد، اما باید سرشت موجی رفتار حاصل از برهم کنش را نیز به دست دهد به علاوه، رفتار موج گونه نباید برای مجموعه انتهایی که اشیایی معمولی را می سازند، و قوانین نیوتون، برای ذرات را می توان با موفقیت در مورد آنها به کار برد، مشاهده شود. این آمیزه خارق العاده رفتار موج گونه و ذره گونه بخشی اساسی در نظریه کوانتومی است، این امر به لحاظ منطقی، ناسارگار به نظر می رسد اما کارآمد است. از این رو، با در نظر گرفتن آزمایش دو شکاف (که آنرا فقط می توان به کمک رفتار موجی نور فهمید) و اثر کامپتون

و فوتوالکتریک (که فقط به کمک رفتار ذره ای نور قابل درک اند) به این نتیجه می رسیم که، آیا این سرشت دوگانه ذره – موج یک ویژگی مربوط به نور است یا اجسام مادی نیز از آن برخوردارند؟

دوبروی بدون هیچگونه پشتوانه تجربی‌وبا یک فرض جسورانه وتحیرآمیز که در رساله دکتریش در سال ۱۹۲۴ مطرح کرد فرض دوم را برگزید و پیشنهاد کرد که به هر ذره مادی که با تکانه p حرکت می کند موجی با طول موج λ وابسته است. از طرفی، رفتار آتی ذره در وضعیت کلاسیک را می توان با استفاده از قانون های نیوتون، با قطعیتی مطلق پیش بینی کرد. می توانیم با انجام عملیات ریاضی لازم برای حل قانون دوم نیوتن $F = dp/dt$ (معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم) مکان، $r(t)$ و سرعت، $v(t)$ ذره را، در همه زمان های آینده t، پیدا کنیم هرچند این محاسبات ریاضی ممکن است دشوار باشند و در واقع حل این معادله ها در شکل بسته ناممکن است اما، اینها تنها مشکلات ریاضی اند و فیزیک مسئله، از نوشتن معادله اصلی و تفسیر جوابهای آن تشکیل شده است. در فیزیک کوانتومی غیرنسبیتی، معادله اصلی که باید حل شود، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به نام معادله شرودینگر است. معادله شرودینگر مانند قوانین نیوتن، باید برحسب نیروهای معینی نوشته شود که بر ذره وارد می شوند (هر چند که کار با انرژی پتانسیل راحت تر از نیروست). معادله شرودینگر، برخلاف قوانین نیوتن مسیرحرکت را نمی دهد در عوض، جواب آن تابع موج ذره را به دست می دهد که حاوی اطلاعات درباره رفتار موج گونه ذره است. هرچند که موفقیت نظریه کوانتومی در حل نارسایی مفاهیم کلاسیک ذرات و امواج چشمگیر است، اما خود این نظریه نیز دارای نارسایی هایی می باشد. از این رو، در این رساله به گوشه ای از این نارسایی ها پرداخته و موفقیت نظریه کوانتومی مختلط را در حل برخی از این نارسایی ها بررسی می کنیم. در این رساله، ابتدا مروری کوتاه بر مکانیک کوانتومی بوهمی و تعبیر وی از مکانیک کوانتومی استاندارد، و ایراداتی که وی برآن وارد کرده می پردازیم، سپس اساس ساختار مکانیک مختلط را بیان کرده و به بررسی ریشه و اصل کوانتش، که هسته اصلی در ساختن سیستم های کوانتومی است و تاکنون بدون هیچ گونه اثبات رسمی‌وتنها با استفاده از نظریه اساسی مکانیک ارائه شده است، پرداخته و نشان می‌دهیم که، عملگرهای کوانتومی ریشه در فضا- زمان مختلط دارند. در ادامه نیز به بررسی خاصیت دوگانگی موجی- ذره‌ای می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که منشا یک موج مادی، به حرکت ذره در فضای مختلط،

وهمچنین‌وجودپتانسیل‌کوانتومی مختلط مربوط می‌شود، همچنین درباره کاربردهای مکانیک کوانتومی مختلط در درک برخی مسئله ها نیز، اشاره‌ای کوتاه خواهیم داشت.

فصل اول

مروری کوتاه بر مکانیک کوانتومی بوهمی

در سال ۱۹۵۲ دیوید بوهم دو مقاله تحت عنوان یک تعبیر پیشنهادی برنظریه کوانتومی، براساس متغیرهای نهانی I, II ارائه داد و در آن یک تعبیر علّی برای مکانیک کوانتومی مطرح نمود. اگرچه بعدها بوهم و شاگردانش تعداد زیادی مقاله در این زمینه ارائه نمودند ولی،رئوس‌مطالب تمام مقالات، همان مقاله اولیه بود و فقط بیان آن عوض شده بود. در مقاله اول، بوهم پس از بررسی تعبیر رایج مکانیک‌کوانتومی،ایرادهایی به آن وارد کرده وسپس مدل پیشنهادی خود رامطرح نموده وبعدمثال‌های ساده‌ای درباره کاربرد مدل خود مطرح کرده است، وی در مقاله دوم و در بقیه مقالاتی که بعدا ارائه داد، به بررسی جنبه های عمیق تر قضیه از قبیل مسئله اندازه گیری، عدم قطعیت، ماهیت متغیرهای نهان، ارتباط فوق نوری و ... پرداخت.

۱-۱ تعبیر بوهم از معادله شرودینگر

معادله شرودینگر برای یک ذره را در نظر می‌گیریم:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\left(\vec{x}\right) \qquad (۱-۱)$$

که در آن ψ یک تابع مختلط است و می‌توان آن را بدین صورت نوشت:

$$\psi = \mathrm{R}e^{\frac{i}{\hbar}S} \qquad (۱-۲)$$

که در آن R,S توابعی از $t,\vec{x}$ هستند:

$$\psi(\vec{x},t) = \mathrm{R}(\vec{x},t)\,e^{\frac{i}{\hbar}S(\vec{x},t)} \qquad (۱-۳)$$

با جاگذاری (۱-۳) در(۱-۱) روابط زیر را بدست می‌آوریم:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[R(\vec{x},t)e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}\right]=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\left[R(\vec{x},t)e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}\right]+V(\vec{x})$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[R(\vec{x},t)e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}\right]=-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left[R(\vec{x},t)e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}\right]+V(\vec{x})$$

$$i\hbar\frac{\partial R}{\partial t}e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}+i\hbar R\frac{\partial}{\partial t}e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}=-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}.\left[\vec{\nabla}\mathrm{R}e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}+R(\vec{x},t)\vec{\nabla}e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}\right]+V(\vec{x})$$

$$i\hbar e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}\frac{\partial R}{\partial t}+i\hbar\mathrm{R}\frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}.\left[\vec{\nabla}Re^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}+R(\vec{x},t)\frac{i}{\hbar}\vec{\nabla}Se^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}\right]+V(\vec{x})$$

$$i\hbar e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}\frac{\partial R}{\partial t}+i\hbar\frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}R\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}Re^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)})+\frac{i}{\hbar}\vec{\nabla}.(R(\vec{x},t)\vec{\nabla}Se^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)})\right]+V(\vec{x})$$

$$i\hbar e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}\frac{\partial R}{\partial t}+i\hbar\frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}R\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\vec{\nabla}.\vec{\nabla}Re^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}+\vec{\nabla}R\vec{\nabla}e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}+\frac{i}{\hbar}(R\vec{\nabla}.\vec{\nabla}S\,e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}+\right.$$

$$\left.+R\vec{\nabla}S\,\vec{\nabla}e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)})\right]+\frac{i}{\hbar}\vec{\nabla}R\vec{\nabla}Se^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}+V(\vec{x})$$

$$i\hbar e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}\frac{\partial R}{\partial t}+i\hbar\frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}R\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\nabla^2 R\, e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}+\vec{\nabla}R\frac{i}{\hbar}\vec{\nabla}S\, e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}+$$

$$\frac{i}{\hbar}(R\nabla^2 S e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}+R\vec{\nabla}S\frac{i}{\hbar}\vec{\nabla}S e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)})\Big]+\frac{i}{\hbar}\vec{\nabla}R\vec{\nabla}S\, e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}+V(\vec{x})$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}\left\{i\hbar\frac{\partial R}{\partial t}+i\hbar\frac{i}{\hbar}R\frac{\partial S}{\partial t}\right\}=e^{\frac{i}{\hbar}s(\vec{x},t)}(-\frac{\hbar^2}{2m})\Big[\nabla^2 R+2\vec{\nabla}R\vec{\nabla}S\frac{i}{\hbar}+$$

$$+\frac{i}{\hbar}R\nabla^2 S+R(\frac{i}{\hbar})^2\vec{\nabla}S\,\vec{\nabla}S\Big]+V(\vec{x})$$

$$i\hbar\frac{\partial R}{\partial t}+i\hbar\frac{i}{\hbar}R\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 R-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{i}{\hbar}2\vec{\nabla}R\vec{\nabla}S-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{i}{\hbar}R\nabla^2 S-$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}R(\frac{i}{\hbar})^2(\vec{\nabla}S)^2+V(\vec{x})$$

$$i\hbar\frac{\partial R}{\partial t}-R\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 R-\frac{i\hbar}{2m}2\vec{\nabla}R\vec{\nabla}S-\frac{i\hbar}{2m}R\nabla^2 S-$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}R(\frac{i}{\hbar})^2(\vec{\nabla}S)^2+V(\vec{x})$$

$$i\hbar\frac{\partial R}{\partial t}-R\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{i\hbar}{2m}2\vec{\nabla}R\vec{\nabla}S-\frac{i\hbar}{2m}R\nabla^2 S-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 R-$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}R(\frac{i}{\hbar})^2(\vec{\nabla}S)^2+V(\vec{x})$$

$$(i\hbar\frac{\partial R}{\partial t})-(R\frac{\partial S}{\partial t})=-\frac{i\hbar}{2m}(2\vec{\nabla}R\vec{\nabla}S+R\nabla^2 S)+\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2 R+R(\frac{i}{\hbar})^2(\vec{\nabla}S)^2\right]\right\}$$

$$+V(\vec{x})$$

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial R}{\partial t} \equiv -\dfrac{i\hbar}{2m}\left(2\vec{\nabla}R\vec{\nabla}S + R\nabla^2 S\right) \\ -R\dfrac{\partial S}{\partial t} \equiv -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2 R - \dfrac{R}{\hbar^2}(\vec{\nabla}S)^2\right] + V(\vec{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial t} \equiv -\dfrac{1}{2m}\left(R\nabla^2 S + 2\vec{\nabla}R\vec{\nabla}S\right) \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} \equiv -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left[-\dfrac{\nabla^2 R}{R} + \dfrac{R}{R\hbar^2}(\vec{\nabla}S)^2\right] - V(\vec{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial t} \equiv -\dfrac{1}{2m}\left(R\nabla^2 S + 2\vec{\nabla}R\vec{\nabla}S\right) \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} \equiv -\left[\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\nabla^2 R}{R} + \dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{R}{R\hbar^2}(\vec{\nabla}S)^2 + V(\vec{x})\right] \end{cases}$$

و خواهیم داشت:

$$\frac{\partial R}{\partial t} \equiv -\frac{1}{2m}\left(R\nabla^2 S + 2\vec{\nabla}R\vec{\nabla}S\right) \qquad (۱-٤)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} \equiv -\left[\frac{(\vec{\nabla}S)^2}{2m} + V(\vec{x}) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}\right] \qquad (۱-٥)$$

حال اگر $\rho(x) = R^2(x)$ قراردهیم، آن گاه $\rho(x)$ چگالی‌احتمال خواهد بود و رابطه (۱-٤) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho\frac{\vec{\nabla}S}{m}\right) = 0 \qquad (۱-٦)$$

درحد $\hbar \to 0$معادله(۱-٥) همان معادله هامیلتون – ژاکوبی خواهد شدومانندمعادله هامیلتون – ژاکوبی

می توان $\frac{\vec{\nabla}S}{m}$را می توان به عنوان بردار سرعت تعبیر نمود:

$$v(x) = \frac{\vec{\nabla}S}{m}$$

بنابراین، اگر ذراتی را در نظر بگیریم که با سرعت $v(x)$ در حرکت باشند، معادله هامیلتون- ژاکوبی فوق، معادله حرکت این ذرات خواهدبود و با این تعریف معادله (۱-٦)به صورت زیرتبدیل‌می شود:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}.(\rho\vec{v})=0 \qquad (۱-۷)$$

که این معادله، همان‌فرم دیر آشنای معادله پیوستگی را دارد. بدین معنی‌که $\rho\vec{v}$ به عنوان جریان ذرات و ρبه عنوان چگالی‌احتمال وجود ذرات، رابطه پیوستگی(۱-۷) را ارضاء می نماید، که در واقع قانون بقای‌احتمال است.اگرحالت $\hbar=0$رادرنظربگیریم،تنهاتفاوتی‌که‌حاصل می شود درجمله $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2R}{R}$ در معادله (۱-۵) است. حال اگر این جمله را نیز به نحوی به عنوان پتانسیل تعریف کنیم، یعنی $U(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2R}{R}$ را به عنوان پتانسیل کوانتومی‌در نظر بگیریم، که با پتانسیل اصلی جمع می‌شود و یک پتانسیل کلی را بوجود می آورد، آن گاه می توان تمام حرفهای قبل را تکرار نمود، یعنی می توان ذراتی را در نظر گرفت که تحت تاثیر پتانسیل $V(x)+U(x)$ حرکت می نمایند. معادله (۱-۵)، معادله هامیلتون – ژاکوبی توصیف کننده حرکت این ذرات است و بنابراین، باز $\frac{\vec{\nabla}S}{m}$ را سرعت ذرات در نظر خواهیم گرفت. نکته مهم این است که، برخلاف‌روش هایی که در مکانیک کلاسیک مطرح می شوند در اینجا، معادله هامیلتون – ژاکوبی (۱-۵) را به عنوان دستورالعملی برای پیدا کردن S و در نتیجه محاسبه مسیر ذرات بکار نمی بریم، چرا که R که در معادله (۱-۵) ظاهر شده است، خود از طریق معادله (۱-٤) به S مربوط است. بنابراین، معادلات (۱-٤) و (۱-۵) جفت شده هستند و اگر بخواهیم آنها را همزمان حل کنیم معادل آن است که، معادله شرودینگر را حل نموده باشیم پس، راحت ترین روش آن است که، ابتدا معادله شرودینگر را حل کرده و ψ را به دست بیاوریم و سپس R و S را طبق روابط زیر از روی ψ بدست آوریم:

$$\begin{cases}\psi=U+iw\\ R^2=U^2+W^2\\ S=\hbar\tan^{-1}(\frac{W}{U})\end{cases} \qquad (۱-۸)$$

توجه کنیم‌که‌باداشتن S وبادرنظرگرفتن معادله $v(\vec{x})=\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{\vec{\nabla}S}{m}$ می توان مسیر ذرات را مشخص نمود و بنابراین، در عمل نیازی به معادله هامیلتون – ژاکوپی پیش نمی آید. بنابراین، همان طورکه گفتیم معادله هامیلتون – ژاکوبی، صرفا جنبه تعبیری دارد نه جنبه محاسباتی.