وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه مقطع کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان:

بررسی مسایل مقدار اولیه—مرزی شامل معادلات دیفرانسیل روی بازه‌های زمانی در حالت خودالحاق و ناخودالحاق

استاد راهنما:

دکتر محمد جهانشاهی

استاد مشاور:

دکتر جعفر پورمحمود

پژوهشگر:

اصغر احمدخانلو

تیرماه ۱۳۸۷

تبریز— ایران

تقدیم

به

پدر و مادرم

قدردانی

بار الها هر آنچه که در زندگی‌ام داشته‌ام همه متعلق به نام نامی مطلق توست.

حمد بی‌پایان خداوند منان را که ما را لایق معلمانی دانسته که عظمت آنان بی‌منتها، هدایتشان بی‌نظیر و همنوایی با آنان سعادت است.

اکنون که در آستانه‌ی پایان این مرحله از تحصیل قرار دارم بر خود واجب می‌دانم از زحمات بی دریغ معلمان زندگی، پدر و مادر عزیزم صمیمانه تشکر کنم.

از استاد بزرگوار، آقای **دکتر محمد جهانشاهی**، که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا قدم به قدم تا به انجام رسانیدن این پایان‌نامه راهنمایی کردند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌کنم.

از استادان محترم آقای **دکتر شهرام رضاپور** ، آقای **دکتر علیرضا غفاری** و آقای دکتر **جعفر پورمحمود** و سایر اساتید فرهیخته گروه ریاضی‌که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام، تشکر و قدردانی می‌کنم. امیدوارم که سپاس بی‌پایان اینجانب را بپذیرند.

در پایان از دوست گرانقدرم آقای **مهدی خانکشی‌زاده** که در یافتن برخی مراجع مورد نیاز این پایان نامه مرا یاری نمودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

اصغر احمدخانلو

تیر ماه ۱۳۸۷

تبریز—ایران

فهرست مندرجات

چکیده

مسایل مقدار مرزی و اولیه در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و مسایل مهندسی مشاهده می‌شود، لذا بررسی و حل مسایل مقدار اولیه و مرزی شامل معادلات دیفرانسیل از اهمیت بالایی برخوردار است. در این پایان‌نامه این مسایل روی دامنه‌ی جواب جدیدی به نام بازه‌ی زمانی مطرح می‌شود. ابتدا وجود و یگانگی جواب مسایل مقدار اولیه شامل معادلات دیفرانسیل روی بازه‌های زمانی اثبات می‌شود. سپس مسایل مقدار مرزی و توابع گرین این مسایل مطالعه می‌شود، توابع گرین این مسایل بر خلاف مسایل معادلات دیفرانسیل معمولی، همیشه متقارن نیست. البته اثبات می‌شود که، توابع گرین مسایل خودالحاق متقارن می‌باشند. سرانجام مسایل خودالحاق به همراه تعمیمی از مسایل مقدار اولیه و مرزی برای مراتب بالا نیز بررسی می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: **معادلات دیفرانسیل، بازه‌های زمانی، مسایل مقدار اولیه و مرزی، تابع گرین.**

پیشگفتار

یکی از شاخه‌های علم ریاضی معادلات دیفرانسیل است که کاربرد بسیاری در مهندسی و فیزیک دارد و طی سال‌های اخیر پیشرفت بسیاری کرده است. در سال ۱۹۹۰ اشتفان هیلگر [۱] راه جدیدی را برای پیشرفت معادلات دیفرانسیل و تعمیم و گسترش آن باز کرد، پس از او نیز برخی راه او را ادامه داده‌اند و به نتایج بسیار جالبی دست یافته‌اند. هیلگر در رساله‌ی دکترای خود حسابان جدیدی را به نام (Calculus of measure chain) معرفی کرد، هدف او از معرفی این حسابان متحد ساختن آنالیز گسسته و پیوسته بود، او سه هدف اصلی معرفی این حسابان جدید را متحد سازی، توسیع و گسسته‌سازی نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل می‌داند. همچنین او در این رساله بیان می‌کند که در آنالیز برای رسیدن به بسیاری از احکام و نتایج، کافی است مساله‌ی مورد نظر را حالت خاصی از این حسابان به نام بازه‌ی زمانی در نظر بگیریم که به‌طور ساده عبارت است از هر زیرمجموعه‌ی بسته و غیرخالی از اعداد حقیقی. او سپس توانست روی این فضای معرفی شده دو نوع مشتق به نام‌های مشتق دلتا و نابلا معرفی کند. سپس معادلات دیفرانسیل شامل این مشتقات را ارایه داد، این معادلات به گونه‌ای است که علاوه بر معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات تفاضلی [۲] و معادلات q—تفاضلی [۳] را نیز شامل می‌شود. به عبارتی دیگر می‌توان تمام نتایج و قضایای این مبحث‌ها را از قضایای این معادلات نتیجه گرفت. در این پایان‌نامه به بررسی بخش‌هایی از این معادلات خواهیم پرداخت.

فصل اول به برخی مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز و مفاهیم مقدماتی بازه‌های زمانی اختصاص دارد. در

[۱] S. Hilger

[۲] Difference equation

[۳] Quantum equation

فصل دوم مسایل مقدار اولیه شامل معادلات دیفرانسل با مشتق دلتا و نابلا بررسی خواهد شد. در فصل سوم نیز مسایل مقدار مرزی شامل این معادلات بیان خواهد شد، سپس تابع گرین برای برخی از این مسایل معرفی خواهد شد. تابع گرین این مسایل بر خلاف تابع گرین مسایل مقدار مرزی عادی همواره متقارن نیست یا به عبارتی تابع گرین مسایل معمولی تنها به عنوان حالت خاصی از معادلات دیفرانسیل روی بازه‌های زمانی متقارن است. در فصل چهارم مسایل خودالحاق که شرط لازم متقارن بودن تابع گرین است مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

لازم به ذکر است که منابع اصلی این پایان‌نامه مقالات [۳]،[٦]، [۷]، [۱۱]، [۱۷] و [۱۸] می‌باشند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پیشنیاز

۱.۱ تعاریف اولیه

در این بخش تعاریف و قضایایی ارایه می‌شوند که دانستن آن‌ها برای مطالعه فصل‌های آتی ضرورت دارد.

تعریف ۱.۱.۱ فضای برداری

فرض کنید V مجموعه‌ای از بردارها، «$+$» جمع برداری و «$\cdot$» ضرب اسکالر دو عمل دوتایی با خواص زیر روی V باشند. در این صورت، $(V, +, \cdot)$ را **فضای برداری** نامند.

خواص عمل جمع: اگر $x, y \in V$ آن‌گاه عنصری مانند $x + y$ وجود دارد که در خواص زیر صدق می‌کند

۱) به ازای هر x و y در V، $x + y = y + x$،

۲) به ازای هر x و y و z در V، $(x + y) + z = x + (y + z)$،

۳) عنصری مانند 0 در V هست به قسمی که به ازای هر x در V، $x = 0 + x$ و $x + 0 = x$،

۴) به ازای هر x در V عنصری مانند $-x$ در V هست به قسمی که $x + (-x) = 0$.

خواص عمل ضرب: هر گاه $a \in R$ اسکالر و $x \in V$ باشد. عنصری مانند ax در V موسوم به ضرب عددی اسکالر a و بردار x وجود دارد که دارای خواص زیر است

۱) به ازای هر $x \in V$، $1 \cdot x = x$،

۲) به ازای هر $a, b \in R$ و $x \in V$، $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$،

۳) به ازای هر $a, b \in R$ و $x, y \in V$، $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ و $(a + b) \cdot x = a \cdot x + a \cdot y$.

تعریف ۲.۱.۱ حاصل‌ضرب داخلی

هر گاه V یک فضای برداری باشد حاصل‌ضرب داخلی (حاصلضرب نقطه‌ای) تابعی است از $V \times V$ به $\mathbb{R}$ که با نگاشت $(x, y) \to x.y$ نشان داده می‌شود و در خواص زیر صدق می‌کند.

۱) به ازای هر $x \in V$، $x.x \geq 0$،

۲) $x.x = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$،

۳) به ازای هر $x, y \in V$ ، $x.y = y.x$،

۴) به ازای هر $x, y, z \in V$، $x.(y + z) = x.y + x.z$ و $(x + y).z = x.z + y.z$،

۵) به ازای هر $x, y \in V$ و $a \in \mathbb{R}$، $(a.x).y = x.(a.y) = a.(x.y)$.

هر فضای برداری که در آن حاصل‌ضرب داخلی تعریف شده باشد فضای **حاصل‌ضرب داخلی** نام دارد.

مثال ۱.۱.۱ ضرب معمولی در فضای $\mathbb{R}$ از خواص فوق برخوردار است در نتیجه $\mathbb{R}$ حاصل‌ضرب داخلی است.

مثال ۲.۱.۱ در $\mathbb{R}^p$ تعریف می‌کنیم،

$$(x_۱, x_۲, \cdots, x_p).(y_۱, y_۲, \cdots, y_p) = x_۱.y_۱ + x_۲.y_۲ + \cdots + x_p.y_p$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که این روابط معرف یک فضای حاصل‌ضرب داخلی در $\mathbb{R}^p$ است.

تعریف ۳.۱.۱ نرم

اگر V یک فضای برداری باشد آن‌گاه **نرم** در V تابعی است از V به $\mathbb{R}$ که با $x \longrightarrow \parallel x \parallel$ نشان داده می‌شود و در خواص زیر صدق می‌کند:

۱) به ازای هر $x \in V$، $\parallel x \parallel \geq ۰$،

۲) $\parallel x \parallel = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$،

۳) به ازای هر $x \in V$ و $a \in R$، $\parallel ax \parallel = \mid a \mid \parallel x \parallel$ ،

۴) به ازای هر $x, y \in V$، $\parallel x + y \parallel \leq \parallel x \parallel + \parallel y \parallel$.

فضای برداری که در آن نرم تعریف شده باشد فضای خطی نرمدار نام دارد.

مثال ۳.۱.۱ در $\mathbb{R}^p$ تعریف می‌کنیم

$$\parallel (x_۱, x_۲, \cdots, x_p) \parallel = \sqrt{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_p^۲}$$

در این‌صورت $\parallel . \parallel$ یک نرم در $\mathbb{R}^p$ می‌باشد.

تعریف ۴.۱.۱ نیم‌حلقه

گردایه‌ای از مجموعه‌ها، مانند S است که دارای سه خاصیت زیر باشد:

$$۱) \quad \emptyset \in S,$$

$$۲) \quad A, B \in S \quad \Rightarrow A \cap B \in M$$

$$۳) \quad A, B \in S \quad \Rightarrow \exists C_۱ \ldots C_n \in S, C_i \bigcap_{i=j} C_j \neq \emptyset; A - B = \bigcup_{i=۰}^{i=n} C_i;$$

تعریف ۵.۱.۱ اندازه[۱]

فرض کنید مجموعه X شامل یک نیم‌حلقه مانند S باشد. یک **اندازه** روی S تابعی چون $\mu : S \to [0, \infty)$ است به قسمی که

الف) $\mu(\emptyset) = 0$؛

ب) اگر $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در S باشد، آن‌گاه

$$\mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{1}^{\infty} \mu(A_i)$$

که در آن برای هر $n \neq m$، $A_n \neq A_M$. خاصیت (ب) را جمعی شمارش‌پذیر نامیده می‌شود که جمعی متناهی بودن را ایجاب کند:

$$\mu\left(\bigcup_{1}^{n} A_i\right) = \sum_{1}^{n} \mu\left(A_i\right)$$

زیرا برای $i > n$ می‌توان A_i را تهی در نظر گرفت.

تعریف ۶.۱.۱ فضای باناخ

یک فضایی خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام (کامل) باشد.

مثال ۴.۱.۱ فضای برداری $\mathbb{R}^n$ با نرم

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

فضای باناخ است، که در آن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

تعریف ۷.۱.۱ تابع اندازه‌پذیر[۲]

فرض کنید X فضای باناخ و $-\infty < a < b < \infty$ باشد. تابع $f : [a, b] \to X$ اندازه‌پذیر است هرگاه

[۱] Measure

[۲] *Measurable*

دنباله‌ای از توابع ساده $f_n : [a,b] \to X$ در $[a,b]$ وجود داشته باشد که تقریبا همه جا بطور نقطه‌ای به f همگرا باشند.

تعریف ۸.۱.۱ انتگرال لبگ

فرض کنید $f : X \times [a,b] \to \mathbb{C}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ و به ازای هر $t \in [a,b]$ تابع $f : (.,t) \to \mathbb{C}$ انتگرال‌پذیر باشد، قرار می‌دهیم

$$F(t) = \int_X f(x,t) d\mu(x).$$

در حالت خاص که اندازه μ اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ است، انتگرال فوق را **انتگرال لبگ** می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱ تابع F بطور متساوی لیپ‌شیتز[۳] از مرتبه α در نقطه x_0 گویند هرگاه مانند L وجود داشته باشد بقسمی که برای هر $x \in B(c)$ و $x \neq c$،

$$|F(x) - F(c)| < L|x-c|^{\alpha},$$

که در آن به عدد L ثابت لیپ‌شیتز گویند.

تعریف ۱۰.۱.۱ نگاشت انقباض

فرض کنید (M,d) فضای متریک و M' زیرفضایی از M باشد. نگاشت $T : M' \to M$ را نگاشت انقباض نامند هرگاه عدد حقیقی $0 < \alpha < 1$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $u_1, u_2 \in M'$ داشته باشیم

$$d(T(u_1), T(u_2)) \leq \alpha d(u_1, u_2).$$

---

[۳] *Lipschitz*

قضیه ۱.۱.۱ نقطه ثابت در فضای باناخ
فرض کنید (M,d) فضای متریک کامل و $T : M \to M$ نگاشت انقباض باشد. در این‌صورت نگاشت T دارای نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

برهان. [۱۹]. ■

۲.۱ مقدماتی از معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۲.۱ یک **معادله‌ی دیفرانسیل خطی**، معادله‌ی دیفرانسیلی به شکل $Ly = f$ است که عملگر دیفرانسیلی L، یک عملگر خطی است. y تابع مجهول و f تابعی معلوم است. به عبارتی دیگر یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی n، ترکیبی خطی از تابع مجهول y و مشتقات آن به شکل

$$a_n(x)D^n y(x) + a_{n-1}(x)D^{n-1}y(x) + \cdots + a_1(x)Dy(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

است که ضرایب $a_n(x)$ از فضای خطی توابع حقیقی می‌باشند. اگر $f(x) = 0$، معادله را همگن و در غیر این‌صورت آن را ناهمگن گوییم.

تعریف ۲.۲.۱ یک **مساله‌ی مقدار مرزی** عبارت است از یک معادله‌ی دیفرانسیل، به همراه یک مجموعه‌ی محدود کننده به نام شرایط مرزی. یک جواب مساله‌ی مقدار مرزی، جوابی از معادله‌ی دیفرانسیل مذکور است که در شرایط مرزی صدق کند.

تعریف ۳.۲.۱ یک **مساله‌ی مقدار اولیه** عبارت است از یک معادله‌ی دیفرانسیل به همراه یک یا چند مقدار تعیین شده به نام شرایط اولیه، از تابع مجهول در یک نقطه از دامنه‌ی جواب.

تعریف ۴.۲.۱ معادله‌ی اشتروم لیوویل نوعی معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم به شکل

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=\lambda w(x)y,$$

است که بعد از J. C. Francois Sturm (۱۸۵۵–۱۸۰۳) و Joseph Liouvile (۱۸۸۳–۱۸۰۹) به این نام، نامگذاری شد. به‌طوری‌که در این معادله $w(x)$ و $q(x)$ و $p(x)$ در یک بازه‌ی محدود $[a,b]$، پیوسته‌اند. به‌علاوه تابع مجهول y باید در برخی شرایط مرزی روی $[a,b]$ صدق کند. تابع $w(x)$ را نیز تابع وزن می‌نامند.

۳.۱ مقدماتی از بازه‌های زمانی

یک بازه‌ی زمانی $(\mathbb{T})$ عبارت است از هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ناتهی از اعداد حقیقی. اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$، اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$، اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$، اعداد صحیح نامنفی $(\mathbb{N}_\circ)$، $h\mathbb{Z}=\{hk: k\in\mathbb{Z}, h>\circ\}$، $K_q=\{\circ\}\cup q^{\mathbb{Z}}=\{\circ\}\cup\{q^k: k\in\mathbb{Z}, q>۱\}$، مثال‌هایی از بازه‌ی‌زمانی هستند، همانند $[\circ,۱]\cup[۲,۳]$ و $[\circ,۱]\cup\mathbb{N}$ و مجموعه‌ی کانتور.

هر بازه‌ی زمانی با متر $d(t,s)=|t-s|$، برای هر $t,s\in\mathbb{T}$، یک فضای متریک کامل است، در نتیجه با توجه به نظریه‌ی کلی فضاهای متریک، برای $\mathbb{T}$، مفاهیم اساسی نظیر گوی‌های باز (بازه‌ها)، همسایگی‌های نقاط، مجموعه‌های باز و بسته، مجموعه‌های فشرده،.... قابل درک هستند، به‌ویژه برای عدد مفروض $\delta>\circ$، $U_\delta(t)$، $\delta-$همسایگی از نقطه‌ی مفروض $t\in\mathbb{T}$، برابراست با تمام نقاط $s\in\mathbb{T}$ که $d(t,s)<\delta$. همچنین تابع $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ دارای مفهوم حد، پیوستگی و ویژگی‌های توابع پیوسته در فضاهای متریک کامل است (به‌ویژه $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ در هر نقطه از $\mathbb{Z}$ پیوسته است). مهمترین امر معرفی و مشخص کردن مفهوم مشتق است، عملگرهای جهشی پیشرو و پسرو، مهمترین نقش را در بیان مشتق روی بازه‌های زمانی ایفا می کنند. در این بخش، برخی تعاریف و قضایای مهم حساب دیفرانسیل بازه‌ی زمانی را که در فصل‌های بعدی به مراتب از آن‌ها استفاده خواهیم کرد، بیان می‌کنیم. برای جزییات بیشتر می‌توانید به[۱۰، ۱۷] رجوع کنید.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم $\mathbb{T}$ یک بازه‌ی زمانی باشد، برای هر $t \in \mathbb{T}$، **عملگر جهشی پیشرو** $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}.$$

همچنین **عملگر جهشی پسرو** $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

تذکر ۱.۳.۱ در تعریف فوق قرارداد می‌کنیم $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ و $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنیم $\mathbb{T}$ یک بازه‌ی زمانی باشد و $t \in \mathbb{T}$. هرگاه $\sigma(t) > t$. گوییم نقطه‌ی t **راست—گسسته** است و هنگامی که $\rho(t) < t$، گوییم t **چپ—گسسته** است. نقاطی که همزمان راست—گسسته و چپ—گسسته هستند نقطه‌ی **تنها** می‌نامیم.

تعریف ۳.۳.۱ اگر برای نقطه‌ی $t \in \mathbb{T}$، $t < \sup \mathbb{T}$ و $\sigma(t) = t$، گوییم t **راست—چگال** است و اگر $t > \inf \mathbb{T}$ و $\rho(t) = t$، گوییم t **چپ—چگال** است. هرگاه t همزمان راست—چگال و چپ—چگال باشد t را **چگال** می‌نامیم.

تعریف ۴.۳.۱ توابع تراشه‌ای $\mu, \nu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ را با $\nu(t) = \rho(t) - t$ و $\mu(t) = \sigma(t) - t$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنیم $\mathbb{T}$ یک بازه‌ی زمانی باشد، مجموعه‌های $\mathbb{T}_\kappa, \mathbb{T}^\kappa \subseteq \mathbb{T}$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\mathbb{T}^\kappa := \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], & \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

و

$$\mathbb{T}_\kappa := \begin{cases} \mathbb{T}\setminus[\inf\mathbb{T},\sigma(\inf\mathbb{T})), & \inf\mathbb{T} > \infty \\ \mathbb{T}, & \inf\mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

همچنین قرار می‌دهیم $\mathbb{T}^* = \mathbb{T}^\kappa \cap \mathbb{T}_\kappa$. توجه می‌کنیم که $\mathbb{T}^{\kappa^۲} = (\mathbb{T}^\kappa)^\kappa$.

مثال ۱.۳.۱ برای $\mathbb{T}=\mathbb{R}$،

$$\sigma(t) = \inf\{s\in\mathbb{R} : s > t\} = \inf(t,\infty) = t.$$

به همین ترتیب $\rho(t)=t$، یعنی هر نقطه $t\in\mathbb{R}$ چگال است و $\mu(t)\equiv ۰$.

و برای $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$،

$$\sigma(t) = \inf\{s\in\mathbb{Z} : s > t\} = \inf\{t+۱, t+۲, ...\} = t+۱.$$

به طریق مشابه $\rho(t)=t-۱$ و $\mu(t)\equiv ۱$، یعنی هر نقطه $\mathbb{Z}$،نقطه‌ی تنها است.

تعریف ۶.۳.۱ تابع $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ را **راست–چگال پیوسته (چپ–چگال پیوسته)** گوییم اگر f درنقاط راست–چگال (چپ–چگال) $\mathbb{T}$ پیوسته و حد چپ (راست) آن در نقاط چپ–چگال (راست–چگال) موجود و متناهی باشد. مجموعه‌ی توابع راست–چگال پیوسته از $\mathbb{T}$ به $\mathbb{R}$ را با نمادهای

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$$

و مجموعه‌ی توابع چپ–چگال پیوسته از $\mathbb{T}$ به $\mathbb{R}$ را با نمادهای

$$C_{ld} = C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T},\mathbb{R})$$

نشان می‌دهیم.

لم ۱.۳.۱ اصل استقرا برای بازه‌های زمانی

گیریم $t_\circ\in\mathbb{T}$ و $\{S(t) : t\in[t_\circ,\infty)\}$ خانواده‌ای از گزاره‌ها باشد که در شرایط زیرصدق کنند

۱) گزاره $S(t_\circ)$ صحیح است،

۲) اگر $t \in [t_\circ, \infty)$ راست−گسسته و $S(t)$ صحیح باشد، آن‌گاه $S(\sigma(t))$ نیز صحیح است،

۳) اگر $t \in [t_\circ, \infty)$ راست−چگال و $S(t)$ صحیح باشد، آن‌گاه همسایگی از t مانند U وجود دارد که برای هر $s \in U \cap (t, \infty)$، $S(s)$ صحیح است،

۴) اگر $t \in (t_\circ, \infty)$ چپ−چگال و برای هر $s \in [t_\circ, t)$، $S(s)$ صحیح باشد، آن‌گاه $S(t)$ نیز صحیح باشد.

در این‌صورت برای هر $t^* \in [t_\circ, \infty)$، $S(t^*)$ صحیح است.

برهان. فرض کنیم

$$S^* := \{t \in [t_\circ, \infty) : \text{صحیح نباشد } S(t)\}$$

نشان می‌دهیم $S^* = \emptyset$. فرض کنیم چنین نباشد یعنی $S^* \neq \emptyset$ و از این طریق به تناقض می‌رسیم. ازآن‌جا که S^* بسته و ناتهی است، لذا

$$\inf S^* = t \in \mathbb{T}.$$

ادعا می‌کنیم $S(t^*)$ صحیح است. اگر $t^* = t_\circ$ آن‌گاه از (۱) نتیجه می‌شود که $S(t^*)$ صحیح است، اگر $t^* \neq t_\circ$ و $\rho(t^*) = t^*$، آن‌گاه از (۴) نتیجه می‌شود که $S(t^*)$ صحیح است. سرانجام اگر $\rho(t^*) < t^*$. از (۲) نتیجه می‌شود که $S(t^*)$ صحیح است. بنابراین در هر حالت $t^* \notin S^*$، پس t^* نمی‌تواند راست−گسسته باشد و $t^* \neq \max \mathbb{T}$. لذا t^*، راست−چگال است. اما (۳) ما را به تناقض می‌رساند. ■

تذکر ۲.۳.۱ دوگان اصل استقرا برای خانواده‌ی گزاره‌های $S(t)$ای که t در بازه‌ی به فرم $(-\infty, t_\circ]$ قرار دارد نیز برقرار است. در واقع برای نشان دادن درستی $S(t)$ برای هر $t \in (-\infty, t_\circ]$، باید ثابت کنیم $S(t_\circ)$ صحیح است، اگر $S(t)$ برای tای که چپ−گسسته است، صحیح باشد، آن‌گاه باید $S(\rho(t))$ نیز صحیح باشد. اگر $S(s)$ برای هر s در همسایگی tی چپ−چگال صحیح باشد، آن‌گاه باید $S(t)$ نیز باید

صحیح باشد و سرانجام اگر $S(r)$ برای هر $r \in (t, t_0]$ که t راست—چگال است، صحیح باشد، آن‌گاه باید $S(t)$ نیز صحیح باشد.

۱.۳.۱ مشتق بازه‌ی زمانی

تعریف ۷.۳.۱ اگر $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ یک تابع باشد، گوییم مشتق دلتای تابع f، $f^{\Delta}(t)$ در نقطه‌ی $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ وجود دارد هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، همسایگی $U = (t-\delta, t+\delta)$ وجود داشته باشد که برای هر $s \in U$ داشته باشیم

$$\Big|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\Big| \leqslant \epsilon|\sigma(t) - s|.$$

همچنین گوییم f دلتا—مشتق‌پذیر است اگر برای هر $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$، $f^{\Delta}(t)$ موجود باشد.

مثال ۲.۳.۱ فرض کنیم $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ برای هر $t \in \mathbb{T}$ به صورت $f(t) = \alpha$ تعریف شده باشد، که در آن α عدد حقیقی ثابت است تعریف شده باشد. در این‌صورت، $f^{\Delta}(t) \equiv 0$ زیرا برای هر $\epsilon > 0$

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - 0 \times [\sigma(t) - s]| = |\alpha - \alpha| = 0 < \epsilon|\sigma(t) - s|.$$

تعریف ۸.۳.۱ اگر $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ یک تابع باشد، گوییم مشتق نابلای تابع f، $f^{\nabla}(t)$ در نقطه‌ی $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ وجود دارد هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، همسایگی $U = (t-\delta, t+\delta)$ وجود داشته باشد که برای هر $s \in U$ داشته باشیم

$$\Big|[f(\rho(t)) - f(s)] - f^{\nabla}(t)[\rho(t) - s]\Big| \leqslant \epsilon|\rho(t) - s|.$$

همچنین گوییم f نابلا—مشتق‌پذیر است اگر برای هر $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$، $f^{\nabla}(t)$ موجود باشد.

لم ۲.۳.۱ تابع $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ و $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت

۱) اگر f در t دلتا—مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در t پیوسته است،

۲) اگر f در t پیوسته و t راست—گسسته باشد، آن‌گاه f در t دلتا—مشتق‌پذیر است،

۳) اگر t راست—چگال باشد، f در t دلتا—مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر $\lim\limits_{t\to s}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ موجود و متناهی باشد، و در این حالت $f^{\Delta}(t)=\lim\limits_{t\to s}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$،

۴) اگر f در t دلتا—مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$.

برهان. فقط برهان (۱) و (۲) را ارایه می‌کنیم. برای جزییات بیشتر رجوع کنید به [۱۰].

۱) فرض کنیم f در t دلتا—مشتق‌پذیرباشد و $\varepsilon\in(0,1)$. تعریف می‌کنیم.

$$\varepsilon^{*}=\varepsilon(1+|f^{\Delta}(t)|+2\mu(t))^{-1}.$$

به‌وضوح $\varepsilon^{*}\in(0,1)$. بنابه تعریف ۱.۳.۷، همسایگی U از t وجود دارد که برای هر $s\in U$ داشته باشیم

$$|f(\sigma(t))-f(s)-[\sigma(t)-s]f^{\Delta}(t)|\leq\varepsilon^{*}|\sigma(t)-s|.$$

لذا به ازای هر $s\in U\bigcap(t-\varepsilon^{*},t+\varepsilon)$ داریم

$$\begin{aligned}
|f(t)-f(s)| &=|\{f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}[\sigma(t)-s]\}-\{f(\sigma(t))-f(t)-\mu(t)f^{\Delta}(t)\}\\
&\quad+(t-s)f^{\Delta}(t)|\\
&\leq\varepsilon^{*}|\sigma(t)-s|+\varepsilon^{*}\mu(t)+|t-s|\;|f^{\Delta}(t)|\\
&\leq\varepsilon^{*}|\sigma(t)-t+t-s|+\varepsilon^{*}\mu(t)+|t-s|\;|f^{\Delta}(t)|\\
&\leq\varepsilon^{*}[\mu(t)+|t-s|+\mu(t)+f^{\Delta}(t)|\\
&<\varepsilon^{*}[1+2\mu(t)+f^{\Delta}(t)|\\
&=\varepsilon.
\end{aligned}$$

در نتیجه f در t پیوسته است.