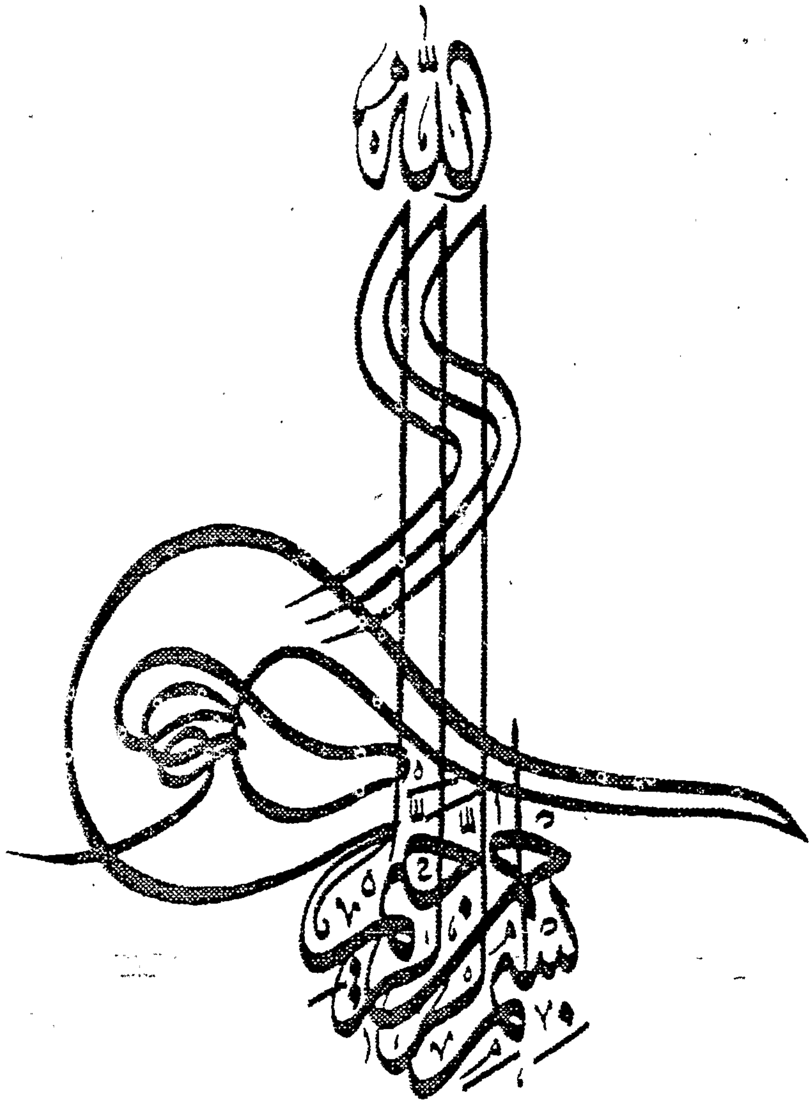

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

بهترین تقریب در رده ای از فضاهای نرم دار، همراه با مخروط های ستاره گون

استاد راهنما:

دکتر حسین محبی

مؤلف:

فاطمه رضا آخوندزاده

شهریورماه ۱۳۸۷

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی - دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو : فاطمه رضا آخوندزاده

استاد راهنما : دکترحسین محبی

داور ۱ : دکترعباس سالمی

داور ۲ : دکترمحمدعلی ولی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکترسید ناصر حسینی

پروردگارا ! به روان محمود محمد و آل محمّد رحمت فرست و آن خدمت و ارادت را که شایسته مقام پدر و مادرم باشد به قلب من بیاموز، به من الهام کن تا بدانم که در حق پدر و مادر چه باید کرد و آنگاه توفیقی عنایت فرمای تا آنچه شایسته و بایسته آنان دانم در حقشان به جای آورم،

توفیقم ده که تکلیفهای خود را نسبت به پدر و مادرم انجام دهم، آنچنان که در ادا و انجام تکلیف فرزندی خود دقیقه ای فروگذار نکنم و سستی و اهمال روا ندارم.

"برگرفته از صحیفه سجادیه"

تقدیم به :

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

که عاشقانه روشنایی بخش زندگی ام هستند.

تشکر و قدردانی

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند، وحسابگران از شمارش نعمتهای او ناتوان، و تلاشگران از ادای حق او درمانده اند. خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید. پروردگاری که برای صفات او حد و مرزی وجود ندارد، و تعریف کاملی نمی توان یافت و برای خدا وقتی معین، و سرآمدی مشخص نمی توان تعیین کرد.

" برگرفته از نهج البلاغه "

با تشکر از پدر و مادر عزیزم که با تمام وجود، امکان تکاپو در این وادی پر پیچ و خم را برایم میسر نمودند و همواره با حماسه حضور خود کلمه مقدس تلاش را بر لوح سینه ام نقش می زنند.

واز تک تک اعضای خانوادهٔ عزیزم از صمیم قلب سپاسگزارم و از :

- کلیه اعضای هیأ ت علمی بخش ریاضی دانشگاه کرمان که از محضر درسشان استفاده نمودم؛
- دوستان عزیزم در دورهٔ تحصیلی؛
- کارمندان محترم بخش ریاضی بخاطر همکاریهای فراوان؛

صمیمانه تشکر می نمایم و بری ایشان آرزوی سرافرازی و توفیق را دارم.

با سپاس فراوان از جناب آقای دکتر حسین محبی که در طی یکسال گذشته با راهنماییهای سودمندشان مرا در زمینه درس و پایاننامه یاری نموده اند و نیز با تشکر از جناب آقای دکتر عباس سالمی و جناب آقای دکتر محمدعلی ولی که داوری این پایاننامه را بر عهده گرفتند. از خداوند متعال توفیق روزافزون ایشان را خواستارم.

چکیده

ما بهترین تقریب را بوسیله مجموعه های بسته در رده ای از فضاهای نرم دار، همراه با مخروط های ستاره گون تخمین می زنیم .

فرض شده است که نرم روی فضای X تحت عوامل تولید شده بوسیله مخروط ستاره گون می باشد . ابتدا ، بهترین تقریب را بوسیلهٔ مجموعه های بالایی و پایینی مطالعه خواهیم کرد و سپس از نتایج بدست آمده به عنوان ابزاری برای تخمین بهترین تقریب بوسیله مجموعهٔ بسته دلخواهی ، استفاده خواهیم کرد . فرض کنید X یک فضای باناخ حقیقی و A یک زیرمجموعه از X باشد و $x \notin A$. ما جدایی پذیری – مخروطی در شرایطی از جداسازی بوسیله یک گردایه از تابعکهای خطی تعریف شده روی X ، ارائه می کنیم و شرایط لازم و کافی بدست آمده را برای جداسازی A و x معرفی می نماییم . همچنین ما مشخصه هایی برای‌جداسازی ستاره گون ارائه می دهیم و در آخر به عنوان کاربردی از جداسازی ، مسایل بهترین تقریب بوسیله عناصری از مجموعه های ستاره گون مشخص می کنیم .

مقدمه

تئوری بهترین تقریب بوسیله عناصری از مجموعه های محدب در فضاهای خطی نرم دار ، بخوبی توسعه داده شده است ودارای کاربردهای زیادی می باشد [$2,3,5,6,13,21-26$] . هر چند محدب بودن بعضی اوقات یک فرض محدود می باشد . بسیاری از کاربردهای محدب بودن ، اساساً روی خواص جدایی پذیری می باشند . اگر اشتراک دو مجموعه محدب ، تهی یا منطبق با اشتراک مرزهای آنها باشد ، در اینصورت این مجموعه ها می توانند بوسیله یک تابعک خطی (از نظر هندسی ، بوسیله یک ابرصفحه) تحت مفروضات کاملاً ساده جدا شوند .

اگر یک نقطه ، به یک مجموعه محدب بسته متعلق نباشد ، آنگاه این نقطه می تواند از آن مجموعه جدا شود .توجه کنید که در مقایسه با حالت کلاسیک ، جداسازی غیرخطی نقطه ای از یک مجموعه ، خواص جدایی پذیری برای دو مجموعه را نتیجه نمی دهد .

بنابراین مسئله پیش آمده ، چگونگی بررسی بهترین تقریب ، نه لزوماً بوسیله مجموعه های محدب می باشد . که ابزار خاصی برای این منظور ، لازم است .

هدف اصلی از این پایان نامه ، توسعه تئوری بهترین تقریب بوسیله عناصری از مجموعه های بسته در رده ای از فضاهای نرم دار ، همراه با مخروط های ستاره گون می باشد .

یک مخروط ستاره گون K در فضای نرم دار X ، رابطه $\leq_K$ روی X ، را تولید می کند .که رابطه ای ترتیبی است اگر و فقط اگر K محدب باشد .

می توان نشان داد هر مخروط ستاره گون K ،که درون هسته K آن غیرتهی است ، به عنوان اجتماعی

از مخروط های نوکدار محدب توپر بسته K_i (I مجموعه اندیس می باشد و $i\epsilon I$) ، می توان نمایش

داد بطوریکه درون مخروط $K_*: = \bigcap_{i\epsilon I} K_i$ غیر تهی می باشد .

نقطه $1\epsilon\, int\, K_*$ ، نرم $\|.\|_*$ روی X تولید می کند ، جاییکه

$\|x\|_* = inf\ \{\lambda>0 : x \leq_{K_*} \lambda 1\ ,\ -x \leq_{K_*} \lambda 1\}$ وما فرض کرده ایم X با این نرم

مجهز شده است .

در حالت خاص $I = \{1\}$ (یعنی ، K یک مخروط نوکدارمحدب توپر بسته باشد .) ، ردهٔ

فضاهای تحت مطالعه شامل فضاهای باناخ شبکه ای مانند $L^{\infty}(S,\sum\ ,\mu)$ از همهٔ توابع

کراندار مقدماتی تعریف شده روی یک فضای اندازه $(S,\sum\ ,\mu)$ است و فضای $C(Q)$ از

همهٔ توابع پیوستهٔ تعریف شده روی یک فضای توپولوژی فشرده Q می باشد .

فضای باناخ شبکه ای به صورت زیر تعریف می شود : ([10] را ببینید .)

تعریف الف- یک شبکه $(L,\leq)$ ،به طور مشروط کامل گفته می شود اگر در یکی از شرایط هم ارز زیر ، صدق کند :

(1) هر مجموعه غیرتهی از پایین کراندار به اینفیمم خود برسد .

(2) هر مجموعه غیرتهی از بالا کراندار به سوپریمم خود برسد .

(3) یک شبکه کامل $\overline{L} := L \cup \{\perp,\Gamma\}$ ، وجود دارد که مینیمال کامل L گوییم ، با عنصر بالایی Γ و عنصر پایینی $\perp$ ، بطوریکه L یک زیر شبکه از $\overline{L}$ می باشد ، $inf L = \perp$ و $sup L = \Gamma$.

تعریف ب- یک شبکه برداری (حقیقی) $(X,\leq,+,\cdot)$ ، یک مجموعه X همراه با یک رابطه ترتیبی $\leq$ می باشد به طوریکه $(X,\leq)$ یک شبکه است . با یک عمل دوتایی $+$ و ضرب اسکالر $\cdot$ به طوریکه $(X,+,\cdot)$ یک فضای برداری می باشد .

تعریف ج- یک شبکه برداری $(X,\leq,+,\cdot)$ به طوریکه $(X,\leq)$ یک شبکه بطور مشروط کامل است را شبکه برداری بطور مشروط کامل گویند .

تعریف د- یک فضای باناخ شبکه ای بطور مشروط کامل X ، یک فضای باناخ حقیقی است که همچنین یک شبکه برداری بطورمشروط کامل است و اینکه

$$|x|\leq|y| \quad\Rightarrow\quad \|x\|\leq\|y\| \quad \forall x,y\in X \ .$$

ما از مجموعه های رو به بالا و رو به پایین به عنوان ابزاری در مطالعهٔ بهترین تقریب بوسیله مجموعه های بسته استفاده می کنیم . یک زیرمجموعه غیرتهی U از فضای X ، رو به پایین نامیده می شود اگر $(u\in U, x\leq_K u)\Rightarrow x\in U$. بطور مشابه یک زیرمجموعه غیرتهی V از X را رو به بالا گویند اگر $(v\in V, x\geq_K v)\Rightarrow x\in V$.

مجموعه های رو به پایین و بالا دارای ساختاری به حد کافی ساده می باشند . اگر $U\subset X$ دلخواه باشد ، می توانیم غلاف روبه پایین نسبی آن را بصورت $U_*=U-K_*$ و غلاف رو به بالای نسبی آن ، $U^*=U+K_*$ جاییکه $K_*=\bigcap_{i\in I}K_i$ ، در نظر بگیریم .

در حالت $I=\{1\}$ ، این مجموعه ها منطبق بر غلاف رو به پایین وغلاف رو به بالای معمولی می باشند . ([19] را ببینید .) این غلافهای نسبی می توانند برای بررسی خواص تقریب از U

استفاده شوند . بطور دقیق ، ما یک تابع درجه اوّل همگن و پیوسته ، $s : X \to \mathbb{R}$ تعریف می کنیم و مجموعه های تراز آن را $Z_+ = \{x \in X : s(x) \geq 0\}$ و $Z_- = \{x \in X : s(x) \leq 0\}$ را در نظر می گیریم . متناظر با هر جفت (U, t) ، جاییکه $U \subseteq X$ و $t \in X$ ، دو مجموعه $U_t^+ = U \cap (t - Z_+)$ و $U_t^- = U \cap (t - Z_-)$ را تعریف می کنیم .

بررسی خواص تقریب از U می تواند به بررسی U_t^+ و U_t^- آن ، تقلیل پیدا کند . در اینصورت ما نشان می دهیم که خواص تقریب از U_t^+ و U_t^- می توانند برای این منظور از غلاف رو به پایین نسبی $(U_t^+)_*$ و غلاف رو به بالای نسبی $(U_t^-)_*$ ، به ترتیب مورد مطالعه قرار گیرند . خواص تقریب از مجموعه های رو به پایین و رو به بالا نقش مهمّی را در این پایان نامه بازی می کنند . این خواص در [7,9,18,19] مطالعه شده اند . در حالتی که K یک مخروط نوکدار محدب توپر بسته است ، بنابراین $\leq_K$ یک رابطهٔ ترتیبی است .

ما نشان می دهیم که بعضی از نتایج بدست آمده در این مقالات خیلی بیشتر از موقعیتهای کلی تر ، از رابطه تولید شده بوسیله مخروط ستاره گون معتبر می باشند .

نکته جالب توجه از جدایی پذیری مجموعه های ستاره گون بوسیله گردایهٔ متناهی از تابعکهای خطی در $(\mathbb{R}^n)^*$ ، در [22] معرفی و مطالعه شده اند . جدایی پذیری بوسیله یک گردایهٔ متناهی از تابعکهای خطی در $(\mathbb{R}^n)^*$ برای مجموعه های ستاره گون در ساختاری از جدایی پذیری – مخروطی تعمیم یافته اند . ([14] را ببینید .)

در این پایان نامه ، تعمیمی از نتایج اصلی از [14,17,22,27] را در رابطه با جدایی پذیری مجموعه های ستاره گون بوسیلهٔ گردایه ای از تابعکهای خطی در X^* ، را ارائه می دهیم به طوریکه X یک فضای باناخ (حقیقی) می باشد .

همچنین به عنوان کاربردی از این جداسازی ، توصیفی از بهترین تقریب بوسیلهٔ عناصری از مجموعه های ستاره گون را ارائه می کنیم .

ساختار این پایان نامه بصورت زیر می باشد :

در فصل اوّل ، مخروط های ستاره گون و خواص آنها را توصیف می نماییم و سپس تابع $p_{u,K}$ را معرفی می کنیم و تعریف نرم $\|\cdot\|_*$ می آوریم .

خواص تقریب از مجموعه های رو به پایین و رو به بالا در فصل دوّم بررسی می شوند .

در فصل سوّم ، مشخصه های بهترین تقریب بوسیله مجموعه های روبه پایین را ارائه می دهیم و مجموعه های رو به پایین اکید و رو به بالای اکید را در یک نقطه مطالعه می کنیم .

همچنین در این فصل ، ایده ای از نقاط چبیشف را بیان می نماییم و روابط آنها را با مجموعه های رو به پایین اکید بررسی می کنیم .

در فصل چهارم ، تعدادی مجموعه کمکی ، غلاف رو به پایین نسبی و غلاف رو به بالا نسبی از مجموعه های دلخواه را تعریف و بررسی می کنیم .

همینطور در بخش آخر آن ، بهترین تقریب را بوسیله مجموعه های بسته مطالعه خواهیم کرد .

در فصل پنجم ، جدایی پذیری- مخروطی وجداسازی بوسیله گردایه ای از تابعکهای خطی در X^* را مطالعه می کنیم و مشخصه هایی از جدایی پذیری مجموعه های ستاره گون بوسیله گردایه ای از تابعکهای خطی در X^* را ارائه می دهیم .

همینطور به عنوان کاربردی از جداسازی ، مشخصه ای از بهترین تقریب بوسیله عناصری از مجموعه های ستاره گون را معرفی می کنیم .

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اوّل

تعاریف

در این فصل ، مخروط های ستاره گون وخواص آنها را توصیف می کنیم وتعدادی تعریف یادآوری می نماییم . سپس تابع $p_{u,K}$ و نرم $\|\cdot\|_*$ را معرفی خواهیم کرد .

در این پایان نامه X یک فضای نرم دار فرض شده است .

بخش ۱ . تعاریف

تعریف ۱ . ۱ : الف)مجموعه $K \subset X$ را یک مخروط گویند هرگاه برای هر $\lambda > 0$ ، $\lambda K \subset K$.

ب)مجموعه $K \subset X$ را مخروط یا مجموعه مخروطی گویند اگر به ازای هر $x \in K$ ، $R_x^0 \subseteq K$.

که در آن $R_x^0 := \{ \lambda x : \lambda > 0\}$.

تعریف ۱ . ۲ : زیرمجموعه K از X را محدب گویند اگر به ازای هر $x, y \in K$ و $0 \le \lambda \le 1$ ، $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.

تعریف ۱ . ۳ : فرض کنید U مجموعه ای محدب باشد . در اینصورت به $K = \bigcup_{\gamma > 0} \gamma U$ غلاف مخروطی گویند .

تعریف ۱ . ۴ : الف) یک مخروط $K \subseteq \mathbb{R}^n$ نوکدار است اگر معادله $x_1 + \cdots + x_n = 0$ با $x_i \in K$ ، غیرممکن باشد مگر اینکه برای هر i ، $x_i = 0$.

ب) یک مخروط محدب $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ، نوکدار است اگر و فقط اگر $K \cap (-K) = \{0\}$.

تعریف ۱ . ۵ : یک مخروط محدب K را توپر گویند هرگاه $int\, K \neq \emptyset$.

تعریف ۱ . ۶ : فرض کنید $U \subset X$. مجموعه $kern\, U$ شامل همه $u \in U$ به طوریکه $(x \in U, 0 \le \alpha \le 1) \Rightarrow u + \alpha(x-u) \in U$ را هسته محدب U گویند .

تعریف ۱ . ۷ : مجموعه ناتهی U راستاره گون گویند اگر $kern\ U$ ، غیرتهی باشد.

لم ۱ . ۸ : اگر U بسته باشد، آنگاه $kern\ U$ نیز بسته است.

اثبات : اگر $u_k \in kernU$ ، $k = 1,2,\ldots$ و $u_k \to u$. $x \epsilon U, \alpha \epsilon [0,1]$ ، داریم

$u_k + \alpha(x-u) \epsilon U$. بنابراین $u + \alpha(x-u) \epsilon U$. یعنی $u \epsilon kernU$. ■

گزاره ۱ . ۹ : فرض کنید $U \subset X$ یک مجموعه باشد و $u \epsilon U$. در این صورت گزاره های

زیر هم ارزند :

(۱) $\varepsilon > 0$ ، یک مجموعه اندیس I و یک خانواده از مجموعه های محدب $(U_i)_{i\epsilon I}$

وجود دارند به طوریکه $(i \epsilon I)$ $U_i \supset B(u,\varepsilon)$ and $U = \bigcup_{i\epsilon I} U_i$ (۱ . ۱) .

(۲) U یک مجموعه ستاره گون است و $u \in int\ kern\ U$.

اثبات : (۲) $\Leftarrow$ (۱) ، فرض کنید $z \epsilon B(u,\varepsilon)$ ، $x \epsilon U$ و $\alpha \in [0,1]$ ، از (۱ . ۱) نتیجه

می شود که $i \epsilon I$ وجود دارد به طوریکه $x \epsilon U_i$ وچون U_i محدب است و $z \epsilon B(u,\varepsilon)$

داریم $z + \alpha(x-z) \epsilon U_i \subset U$. بنابراین $z \in kernU$ برای هر $z \epsilon B(u,\varepsilon)$.

بنابراین $kern\ U \neq \emptyset$ و در نتیجه U یک ستاره گون می باشد و $u \in int\ kern\ U$.

(۱)$\Leftarrow$(۲)، فرض کنید $I = U$. چون $u \epsilon\ int\ kern\ U$ ، $\varepsilon > 0$ وجود دارد

به طوریکه $B(u,\varepsilon) \subset kern\ U$. فرض کنید $x \epsilon U$ و $U_x = co(x \cup B(u,\varepsilon))$.

دراین صورت U_x مجموعه ای محدب می باشد و $x \epsilon U_x$. بنابراین $U \subset \bigcup_{x\epsilon U} U_x$. با

استفاده از تعریف هسته محدب داریم $U_x \subset U$. بنابراین $\bigcup_{x\epsilon U} U_x \subset U$. ■

لم۱ . ۱۰ : فرض کنید K یک مخروط ستاره گون باشد و $K_* = kern\, K$ در اینصورت K_* نیز یک مخروط است .

اثبات : فرض کنید $u\epsilon K_*$ ، $x\epsilon K, \gamma > 0$. قرار دهید $x' = \frac{x}{\gamma}$. آنگاه $x' \in K$. همچنین از تعریف هسته K ، $u + \alpha(x' - u)\epsilon K$ برای هر $\alpha \in [0,1]$. بنابراین داریم :

$\gamma u + \alpha(\gamma x' - \gamma u) = \gamma u + \alpha(x - \gamma u)\epsilon K$. چون x عضو دلخواهی از K می باشد بنابراین $\gamma u\epsilon kern K = K_*$. ■

مثال ۱ . ۱۱ : X را منطبق با فضای $C(Q)$ از همه توابع پیوسته تعریف شده روی فضای متریک فشرده Q فرض کنید و $K = \{ x\epsilon C(Q) : max_{q\epsilon Q}\, x(q) \geq 0 \}$. واضح است که K یک مخروط غیرمحدب است . براحتی دیده می شود که K یک مخروط ستاره گون می باشد و $kern K = K_+$ جاییکه

$$K_+ = \{x\epsilon C(Q) : min_{q\epsilon Q} x(q) \geq 0\} = \{ x\epsilon C(Q) : x(q) \geq 0, \forall q\epsilon Q\}$$

زیرا ، فرض کنید $u\epsilon K_+$. نقطه $x\epsilon K$ را در نظر بگیرید.طبق تعریف K ، نقطه ای مانند $q_1 \epsilon Q$ وجود دارد که $x(q_1) \geq 0$.چون $u(q) \geq 0$ برای همه $q\epsilon Q$ ، بنابراین برای هر $\alpha \in [0,1]$ $\alpha\, u(q_1) + (1-\alpha)x(q_1) \geq 0$. در نتیجه $\alpha u + (1-\alpha)x\epsilon K$. پس $K_+ \subset kern\, K$. حال برای اینکه نشان دهیم $kern\, K \subset K_+$ ، از عکس نقیض استفاده می کنیم . فرض کنید $u \notin K_+$ در اینصورت یک نقطه q_1 وجود دارد به طوریکه $u(q_1) < 0$.

چون u پیوسته است ، می توانیم یک مجموعه باز $G \subset Q$ (حول q_1) پیدا کنیم به طوریکه $u(q) < 0$ برای هر $q\epsilon G$. $x\epsilon K$ را یک تابع فرض کنید به طوریکه $x(q) < 0$ برای همه

$q \notin G$ چون مجموعه $Q\backslash G$ فشرده است ، نتیجه می دهد که $max_{q \notin G}\, x(q) < 0$ ،

بنابراین برای همه $q \epsilon Q$ و $\alpha > 0$ به اندازه کافی کوچک $\alpha x(q) + (1-\alpha)u(q) < 0$.

بنابراین برای این α ها $\alpha x + (1-\alpha)u \notin K$. در نتیجه $u \notin kern\, K$ ، لذا

$kern\, K \subset K_+$ و در نتیجه $kern\, K = K_+$. توجه کنید

$int\, K_+ = \{x \epsilon K_+ : x(q) > 0\ \forall q \epsilon Q\} \neq \emptyset$. در اینصورت K یک ستاره گون

می باشد . ■

مطالب زیر نقش مهمی را در این پایان نامه ایفاء می کنند .

قضیه۱ . ۱۲ : فرض کنید $K \subset X$ یک مخروط بسته باشد و $u \epsilon K$. در اینصورت گزاره های زیر معادلند :

(۱) $\varepsilon > 0$ ، یک مجموعه اندیس I ویک خانواده از مخروط های محدب بسته $(K_i)_{i \epsilon I}$

وجود دارند، به طوریکه $\quad (i \epsilon I) \quad K = \cup_{i \epsilon I} K_i \ \ and\ \ K_i \supset B(u, \varepsilon)$.(۱ . ۲)

(۲) K یک مخروط ستاره گون است و $u \epsilon int\, kern\, K$.

اثبات: (۲) ⇐(۱) از گزاره ۱ .۹ نتیجه می شود که K یک مجموعه ستاره گون است و

$u \epsilon int\, kern\, K$. زیرا K_i برای هر $i \epsilon I$ یک مخروط می باشد ، بنابراین نتیجه می دهد

که K یک مخروط است .

(۱) ⇐(۲) با استفاده از گزاره۱ . ۹ ، خانواده ای از مجموعه های محدب U_i وجود دارند

$(i \epsilon I)$به طوریکه $U_i \supset B(u, \varepsilon)$ و $K = \cup_{i \epsilon I} U_i$.فرض کنید K_i غلاف مخروط بسته از

U_i باشد یعنی $K_i = cl\ \cup_{\lambda > 0} \lambda U_i$ ، در اینصورت $K = \cup_{i \epsilon I} K_i$. ■

تذکر ۱ . ۱۳ : (۱) فرض کنید K یک مخروط ستاره گون بسته با $int\ kern\ K \neq \emptyset$ باشد . آنگاه مجموعه $K_* = kernK$ یک مخروط محدب توپر بسته است .

(۲) توجه کنید که در قضیه ۱ . ۱۲ ، خانواده $(K_i)_{i\epsilon I}$ ، چنان می تواند انتخاب شود که هر K_i یک مخروط محدب نوکدار توپر بسته باشد . مسلماً اگر $u\epsilon int\ kern\ K$ ، آنگاه $u \neq 0$ ویک همسایگی $B(u,\varepsilon)\subset kern\ K$ را طوری می توان انتخاب کرد که $0 \notin B(u,\varepsilon)$. در اینصورت غلاف مخروط بسته $K_i = cl\ \bigcup_{\lambda>0} \lambda U_i$ یک مخروط محدب نوکدار توپر بسته می باشد .

لم ۱ . ۱۴ : فرض کنید K یک مخروط ستاره گون باشد و $K = \bigcup K_i$ ، به طوریکه K_i یک مخروط محدب است و $K_* = \bigcap_{i\epsilon I} K_i$. آنگاه $kern\ K \supset K_*$.

اثبات : اگر $u\epsilon K_*$ ، $x\epsilon K$ آنگاه $j\epsilon I$ وجود دارد به طوریکه $x\epsilon K_j$. از اینکه $u\epsilon \bigcap_{i\epsilon I} K_i$ داریم $u\epsilon K_j$. چون K_j یک مخروط محدب است بنابراین $\alpha x + (1-\alpha)u\epsilon K_j \subset K$ برای هر $\alpha\epsilon(0,1)$. بدین معنی است که $u\epsilon kern\ K$. ■

بخش ۲ . معرفی تابع $p_{u,K}$

تعریف ۲ . ۱ : فرض کنید $U \subset X$ و $0\epsilon kern\ U$. در اینصورت تابع پیمانه مینکوفسکی μ_u ، $\mu_u : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ را می توان به صورت زیر تعریف کرد :

$\mu_u(x) = inf\ \{\lambda > 0 : x\epsilon \lambda U\}$. و قرارداد می کنیم $(inf\ \emptyset = 0)$.

فرض کنید $u\epsilon kern\ U$. در اینصورت $0\epsilon kern(U-u)$. بنابراین تابع پیمانه مینکوفسکی