بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض(آنالیز)

عنوان:

ساختارهای حافظ $n-$میانگین پذیری ضعیف جبرهای باناخ

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا میری

استاد مشاور:

دکتر علیرضا جانفدا

نگارنده:

فاطمه داودی

شهریور ۱۳۹۱

منّت خدای را عز و جل که طاعتش موجب قربتست و به شکر اندرش مزید نعمت

تقدیم به

همسر عزیزم که در لحظه لحظه زندگی یاور و همراه من است.

و به دخترم، بیتا، به‌خاطر صبوری کودکانه‌اش.

در اینجا لازم می‌دانم از تمام کسانی که من را در تهیه این پایان نامه یاری نمودند، تشکر وسپاس گذاری کنم.

از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر محمد رضا میری که بدون راهنمایی ایشان این مجموعه به سرانجام نمی‌رسید، تشکر و قدردانی می کنم.

از مشاور ارجمند جناب آقای دکتر علیرضا جانفدا، از اساتید محترم داور جناب آقای دکتر امان الله اسدی و جناب آقای دکتر ابراهیم نصرآبادی و همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر حسین فضایلی مقیمی نیز تشکر و سپاسگذاری می کنم.

همچنین از جناب آقای دکتر محسن نیازی نیز به‌خاطر کمک و همراهی ایشان تشکرو سپاسگذاری می کنم.

از پدر، مادر و خواهرم که من را در انجام این مجموعه حمایت کردند نیز تشکر می کنم.

ساختارهای حافظ n– میانگین پذیری ضعیف جبرهای باناخ

چکیده:

در حالت کلی یک همریختی کران دار و پوشا، خاصیت n - میانگین پذیری ضعیف را حفظ نمی‌کند، اما در این پایان نامه نشان می‌دهیم که اگر این همریختی، معکوس پذیر راست باشد، خاصیت n - میانگین پذیری ضعیف حفظ می‌شود.

هم‌چنین بعضی از همریختی‌ها روی چندین جبر باناخ بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: دوگان دوم، اشتقاق، میانگین پذیری ضعیف، n - میانگین پذیری ضعیف، جمع مستقیم جبر باناخ، ضرب‌های آرنز.

فهرست مطالب:

پیشگفتار

مفهوم میانگین پذیری ضعیف برای اولین بار برای جبرهای باناخ جابه جایی در سال ۱۹۸۷ توسط باده[۱]، کرتیس[۲] و دیلز[۳] و سپس برای جبرهای باناخ دلخواه در سال ۱۹۹۱ توسط جانسون[۴] معرفی گردید.

مفهوم n - میانگین پذیری ضعیف برای اولین بار در سال ۱۹۹۸ توسط دیلز، قهرمانی[۵] و گرونبرگ[۶] معرفی گردید.

یک ابزار اساسی برای به‌دست آوردن یک جبر باناخ میانگین پذیر این‌است که میانگین پذیری تحت یک تصویر همریخت پایاست. این مطلب در مورد میانگین پذیری ضعیف در جبرهای جابه جایی نیز درست است. اما در حالت کلی برقرار نیست.

در این پایان نامه یک شرط کافی برای n - میانگین پذیری ضعیف از تصویرهای همریخت بررسی می‌شود. به عبارت دقیق‌تر نشان داده می‌شود که تصویر همریخت یک جبر باناخ n - میانگین پذیر ضعیف، n - میانگین پذیر ضعیف است اگر همریختی از یک معکوس راست برخوردار باشد.

علاوه بر این از مطلب فوق برای به‌دست آوردن بعضی از جبرهای باناخ n - میانگین پذیر ضعیف از جبرهای باناخ قبلی استفاده خواهیم کرد.

در فصل اول به تعاریف و مفاهیم اساسی که در فصل های بعدی مورد استفاده خواهند بود می پردازیم و در فصل دوم مفهوم n- میانگین پذیری ضعیف برای برخی از جبرهای باناخ را مورد بررسی قرار می دهیم.

در فصل سوم همریختی هایی که حافظ n- میانگین پذیری ضعیف هستند معرفی می شوند و همچنین n- میانگین پذیری ضعیف جمع مستقیم جبرهای باناخ نیز بررسی می شود.

---

۱ Bade

۲ Curtis

۳ Dales

۴ Johnson

۵ Ghahramani

۶ Gronbæk

در فصل چهارم n- میانگین پذیری ضعیف دوگان دوم جبرهای باناخ و زیر فضاهای درون گرای A^* تعریف و به عنوان آخرین نتیجه از این فصل رابطه بین n- میانگین پذیری ضعیف دوگان دوم یک جبر باناخ و دوگان یک زیر فضای بسته از A^* بیان و اثبات می شود.

۱ فصل اول

تعاریف و مفاهیم اساسی

۱-۱ جبر باناخ

۱-۱-۱ تعریف :

فرض کنید V فضای برداری باشد. تابع حقیقی $\|.\|: V \to \mathbb{R}$ را یک نرم روی V می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) به ازای هر $v \in V$، $\| v \| \geq ۰$ و $\| v \| = ۰$ اگر و فقط اگر $v = ۰$؛

(۲) به ازای هر $v \in V$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\| \alpha v \| = |\alpha| \| v \|$؛

(۳) به ازای هر $u, v \in V$، $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$ (نامساوی مثلث).

فضای $(V, \|.\|)$ را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم.

۱-۱-۲ تعریف :

یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ یک فضای خطی(فضای برداری) مانند A روی $\mathbb{F}$ است همراه با یک نگاشت مانند $\begin{matrix} A \times A \to A \\ (x, y) \to xy \end{matrix}$ که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) برای هر $x, y, z \in A$ داشته باشیم $x(yz) = (xy)z$؛

(۲) برای هر $x, y, z \in A$ داشته باشیم $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$؛

(۳) برای هر $x, y \in A$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.

اگر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ باشد آنگاه جبر A، جبر حقیقی است و اگر $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ باشد آنگاه جبر A، مختلط است.نگاشت $(x, y) \to xy$ ضرب در A نامیده می‌شود و xy یعنی ضرب x در y.

-اگر A یک فضای نرم‌دار باشد و داشته‌باشیم:

$$\| xy \| \leq \| x \| \, \| y \| \quad (x, y \in A)$$

آنگاه زوج $(A, \|.\|)$ را یک جبر نرم‌دار گوییم و اگر جبر نرم‌دار A با نرم $\|.\|$ کامل باشد یعنی هر دنباله کشی در این فضا همگرا باشد آنگاه زوج $(A, \|.\|)$ را یک جبر باناخ گوییم.

۱-۱-۳ تعریف:

فرض کنیم X و Y فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند.مجموعه ی همه نگاشت‌های خطی از X به‌توی Y را با $L(X,Y)$ و مجموعه ی همه نگاشت‌های خطی و کران‌دار از X به‌توی Y را با $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم.

۱-۱-٤ مثال:

فرض کنیم X یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، $L(X,X)$ همراه با ضرب زیر یک جبر است:

$$(ST)(x) = S(Tx) \quad (x \in X)$$

- $L(X,X)$ را با $L(X)$ و $B(X,X)$ را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم.

۱-۱-٥ مثال:

فرض کنیم G یک گروه باشد و تعریف کنیم:

$$l^1(G) := \{f | f: G \to \mathbb{C}\,, \qquad \sum_{s\in G} |f(s)| < \infty\}$$

سپس $l^1(G)$ همراه با جمع و ضرب اسکالر نقطه‌ای و همچنین ضرب و نرمی که در زیر تعریف می‌شود یک جبر باناخ است:

$$(f * g)(s) = \sum_{t\in G} f(t) g(t^{-1}s) \qquad\qquad (s \in G)$$

$$\| f \| = \sum_{s\in G} |f(s)|$$

جبر باناخ $l^1(G)$، جبر گروهی مجزای G نامیده می‌شود.

۱-۲ مدول دو طرفه

۱-۲-۱ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و X یک فضای خطی روی $\mathbb{F}$ باشد. X یکA-مدول چپ است اگر نگاشت $\begin{matrix} A \times X \to X \\ (a, x) \to a.x \end{matrix}$ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) برای هر ثابت $a \in A$ نگاشت $x \to a.x$ روی X خطی باشد؛

(۲) برای هر ثابت $x \in X$ نگاشت $a \to a.x$ روی A خطی باشد؛

(۳) $(a_1, a_2 \in A \, , x \in X)$ $\quad a_1.(a_2.x) = (a_1a_2).x$.

نگاشت $(a, x) \to a.x$ ضرب مدولی گفته می‌شود.

به‌طور مشابه X یک A-مدول راست است اگر یک نگاشت مانند $\begin{matrix} X \times A \to X \\ (x, a) \to x.a \end{matrix}$ موجود باشد به‌طوری که خواص (۱)و (۲) فوق را داشته باشد و همین‌طور خاصیت زیر:

$$(x.a_1).a_2 = x.(a_1a_2) \quad (a_1, a_2 \in A \, , x \in X)$$

X را A – مدول دو طرفه گوییم هرگاه هم A – مدول چپ و هم A – مدول راست باشد و ضرب‌های مدولی آن در شرط زیر صدق کند:

$$a.(x.b) = (a.x).b \quad (a, b \in A, x \in X)$$

۱-۲-۲ مثال:

جبر A با عمل ضرب مدولی دوطرفه در A یک مدول دوطرفه روی خودش است.

۱-۲-۳ تعریف:

A -مدول دوطرفه X متقارن است اگر $\quad (a \in A \, , x \in X) \quad a.x = x.a$.

۱-۲-٤ تعریف:

A -مدول دوطرفه متقارن روی جبر جابه جایی A (جبری که خاصیت جابه جایی ضرب داشته باشد) یک A -مدول نامیده می‌شود.

۱-۳ مدول دوطرفه باناخ

۱-۳-۱ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک فضای باناخ و همین طور یک A -مدول دوطرفه باشد، سپس X یک A -مدول دو طرفه باناخ است اگر نگاشت‌های مدول، پیوسته باشند یعنی $k \geq ۰$ موجود باشد که برای هر $a \in A$ و $x \in X$ داشته باشیم:

$$\| a.x \| \leq k \| a \| . \| x \| \quad , \| x.a \| \leq k \| a \| . \| x \|$$

همچنین می‌توان نرم معادلی روی X یافت که :

$$\| a.x \| \leq \| a \| . \| x \| \quad , \| x.a \| \leq \| a \| . \| x \| \quad (a \in A, x \in X)$$

۱-۳-۲ مثال:

اگر B یک جبر باناخ شامل A و همچنین A یک زیر جبر بسته باشد (A نسبت به جمع و ضرب اسکالر و ضرب بسته باشد)، سپس B همراه با ضرب‌ها در B یک A -مدول دوطرفه باناخ است.

دلیل: عمل ضرب در B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$b.a = ba \quad (a \in A , b \in B)$$

نگاشت $\begin{matrix} B \times A \to B \\ (b,a) \to ba \end{matrix}$ را در نظر می‌گیریم:

۱) برای هر ثابت $b \in B$ نگاشت $\Phi: a \to ba$ روی A خطی است زیرا

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha a_۱ + a_۲) &= b(\alpha a_۱ + a_۲) = b\alpha a_۱ + ba_۲ \\ &= \alpha b a_۱ + b a_۲ \\ &= \alpha\Phi(a_۱) + b\Phi(a_۲) \qquad (a_۱, a_۲ \in A , \alpha \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

۲) برای هر ثابت $a \in A$ نگاشت $\Psi: b \to ba$ روی B خطی است زیرا

$$\Psi(\beta b_۱ + b_۲) = (\beta b_۱ + b_۲)a = \beta b_۱ a + +b_۲ a$$

$$= \beta\Psi(b_1) + \Psi(b_2) \qquad (b_1, b_2 \in B, \beta \in \mathbb{C})$$

۳)

$$(b.a_1).a_2 = (ba_1).a_2 = (ba_1)a_2 = b(a_1a_2) = b.(a_1a_2) \quad (a_1, a_2 \in A, b \in B)$$

بنابراین B یک $A-$ مدول راست است.

برای اینکه نشان دهیم B یک $A-$ مدول چپ است نگاشت $\begin{matrix} A \times B \to B \\ (a,b) \to ab \end{matrix}$ را در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم: $a.b = ab \ \ (a \in A, b \in B)$

این نگاشت شرایط ۱ و ۲ بالا را دارد .

۳)

$$a_1.(a_2.b) = a_1.(a_2b) = a_1(a_2b) = (a_1a_2)b$$
$$= (a_1a_2).b \qquad (a_1, a_2 \in A, b \in B)$$

در نتیجه B یک $A-$ مدول چپ است.

همچنین

$$a_1.(b.a_2) = a_1.(ba_2) = a_1(ba_2) = (a_1b)a_2$$
$$= (a_1b).a_2 \qquad (a_1, a_2 \in A, b \in B)$$

در نتیجه B یک $A-$ مدول دوطرفه است.

۱-٤ اشتقاق

۱-٤-۱ تعریف:

فرض‌کنیم A یک جبر و X یک A - مدول دوطرفه باشد، یک اشتقاق از A به‌توی X یک نگاشت خطی مانند $D: A \to X$ است، به‌طوری که:

$$D(ab) = a.D(b) + D(a).b \quad (a, b \in A)$$

۱-٤-۲ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر و X یک A - مدول دوطرفه باشد، اشتقاق‌های به‌شکل زیر را اشتقاق داخلی می‌گوییم:

$$\delta_x(a) = a.x - x.a \quad (a \in A\,, x \in X)$$

۱-۵ توپولوژی ضعیف ستاره

۱-۵-۱ نمادگذاری:

فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و X^* فضای دوگان X باشد، برای $\lambda \in X^*$ و $x \in X$ حاصل $\lambda(x)$ را با نماد $< x, \lambda >$ نمایش می‌دهیم.

همچنین دوگان دوم X را با X^{**} نشان می‌دهیم و تابع نشاندن متعارف X در X^{**} را با i یا $\widehat{\ }$ نشان می‌دهیم. (i خطی و یک به‌یک است.)

$$i: X \to X^{**} \qquad \hat{x}: X^* \to \mathbb{C} \qquad \lambda \in X^*$$
$$i(x) = \hat{x} \qquad \hat{x}(\lambda) = \lambda(x)$$

$$\| x \| = \| \hat{x} \| \quad , \quad X \leftrightarrow \hat{X} \subseteq X^{**} \Longrightarrow X \subseteq X^{**}$$

در حالت خاص:

$$< \lambda, i(x) > = < \lambda, \hat{x} > = < x, \lambda > \quad (x \in X, \lambda \in X^*)$$

(اگر ابهامی به‌نظر نرسد می‌توان i و $\widehat{}$ را حذف کرد زیرا ساختار جبری X و $\hat{X}$ یکی است.)

۱-۵-۲ تعریف:

فرض کنید X یک فضای برداری نرم دار با دوگان توپولوژیکی X^* باشد. برای هر $x \in X$ تعریف می‌کنیم:

$$P_x(x^*) = |\, x^*(x)|$$

در این‌صورت P_x یک شبه نرم است و توپولوژی تعریف شده توسط خانواده $\{P_x : x \in X\}$ روی X^* را توپولوژی ضعیف ستاره گوییم و با نمادهای w^* یا $\delta(X^*, X)$ نشان می‌دهیم.

۱-۵-۳ قضیه باناخ آلاقلو:

فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی و V یک همسایگی از صفر در این فضا باشد. اگر داشته باشیم:

$$K = \{\, \Lambda \in X^* : |\Lambda x| \leq ۱\, , \qquad x \in V\}$$

سپس K با توپولوژی w^*، فشرده است.

۱-۵-٤ تذکر:

دوگان‌های بالاتر را با $X^{(۱)} = X^*$ ، $X^{(n+۱)} = X^{(n)^*}$ نشان می‌دهیم. همچنین $X^{(\circ)} = X$.

۱-۵-۵ تعریف:

برای هر $a \in A$ و $\lambda \in X^*$ ، $a.\lambda$ و $\lambda.a$ در X^* را با روابط زیر تعریف می کنیم:

$$< x, a.\lambda > = < x.a\, , \lambda >$$

$$< x, \lambda.a > = < a.x, \lambda > \qquad (a \in A\, , x \in X)$$

۱-۵-٦ مثال:

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و X یک A–مدول دوطرفه باناخ باشد، آنگاه X^* نیز یک A–مدول دوطرفه باناخ است.

دلیل: نگاشت $\begin{matrix} A \times X^* \to X^* \\ (a,\lambda) \to a.\lambda \end{matrix}$ را در نظر می گیریم.

X^* ، A -مدول چپ است زیرا برای $x \in X$, $\lambda \in X^*$, $a_۱, a_۲ \in A$ داریم:

$$\begin{aligned} < x, (a_۱a_۲).\lambda > &=< x.(a_۱a_۲), \lambda > \\ &=< (x.a_۱).a_۲, \lambda > \\ &=< x.a_۱, a_۲.\lambda > \\ &=< x, a_۱.(a_۲.\lambda) > \end{aligned}$$

در نتیجه: $(a_۱a_۲).\lambda = a_۱.(a_۲.\lambda)$

نگاشت $\begin{matrix} X^* \times A \to X^* \\ (\lambda,a) \to \lambda.a \end{matrix}$ را درنظر می گیریم.

X^* ، A -مدول راست است زیرا برای $x \in X$, $\lambda \in X^*$, $a_۱, a_۲ \in A$ داریم :

$$\begin{aligned} < x, (\lambda.a_۱).a_۲ > &= < a_۲.x, (\lambda.a_۱) > \\ &= < a_۱.(a_۲.x), \lambda > \\ &= < (a_۱.a_۲).x, \lambda > \\ &= < x, \lambda.(a_۱a_۲) > \end{aligned}$$

در نتیجه : $(\lambda.a_۱).a_۲ = \lambda.(a_۱a_۲)$

X^* ، A -مدول دوطرفه است زیرا برای $x \in X$, $\lambda \in X^*$, $a, b \in A$ داریم :

$$\begin{aligned} < x, a.(\lambda.b) > &= < x.a, (\lambda.b) > \\ &= < b.(x.a), \lambda > \\ &= < (b.x).a, \lambda > \\ &= < (b.x), a.\lambda > \\ &= < x, (a.\lambda).b > \end{aligned}$$

در نتیجه: $a.(\lambda.b) = (a.\lambda).b$

– همچنین به‌طور مشابه دوگان‌های بالاتر یعنی $X^{(n)}$ ، A –مدول دوطرفه هستند و تعریف‌های گفته شده در بالا نشان می‌دهد $a.\hat{x} = \widehat{a.x}$ (چون $a.\hat{x}\,, \widehat{a.x}$ عضوهایی از X^{**} هستند،می‌توانیم یک عضو از X^* را در نظر بگیریم و نشان دهیم دو طرف تساوی با هم برابر است) به‌طوری که $X^{(n)}$ یک زیر مدول از $X^{(n+۲)}$ است، $n \in \mathbb{Z}^+$.

۱–۵–۷ تعریف:

یک زیر مدول مانند Y، یک زیر فضا از مدول راست (چپ) X است، به‌طوری که نسبت به ضرب مدولی بسته باشد، یعنی:

$$Y \subseteq X \implies a.y \in Y \quad (y.a \in Y) \qquad\qquad (a \in A, y \in Y)$$

۱–۵–۸ نکته:

اگر X متقارن باشد، آنگاه هر $X^{(n)}$ نیز متقارن است.

۱–۵–۹ تعریف:

فرض کنید Aجبر باناخ و Xو Y، A–مدول باشند. نگاشت $\theta: X \to Y$ یک همریختی A– مدولی چپ است هر گاه:

(۱) θ خطی باشد یعنی جمع و ضرب اسکالر را حفظ کند؛

(۲) رابطه زیر برقرار باشد:

$$\theta(a.x) = a.\theta(x) \qquad (a \in A\,, x \in X)$$

همچنین θ یک همریختی A–مدولی راست است هر گاه:

(۱) θ خطی باشد؛

(۲) رابطه زیر برقرار باشد:

$$\theta(x.a) = \theta(x).a \qquad (a \in A\,, x \in X)$$

۱-۵-۱۰ تعریف:

فرض کنیم X یک A-مدول دوطرفه باناخ باشد و فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ مزدوج نگاشت یک به‌یک $i: X^{(n-1)} \to X^{(n+1)}$ یک نگاشت تصویر مانند $P: X^{(n+2)} \to X^{(n)}$ است که تعریف می‌کنیم :

$$P(\Lambda) = \Lambda\,|_{i(X^{(n-1)})} \qquad , \quad \Lambda: X^{(n+1)} \to \mathbb{C}$$

به‌طوری که: $X^{(n-1)} \subseteq X^{(n+1)}$

می‌توان نوشت:

$$X^{(n+2)} = X^{(n)} \oplus \ker P = X^{(n)} \oplus i\big(X^{(n-1)}\big)^{\perp}$$

که $X^{(n+2)}$ نیز یک A -مدول دوطرفه باناخ است.

(به کمک هر نگاشت تصویر پیوسته مانند P روی X می‌توان تجزیه توپولوژیک از X به‌صورت $X = \ker P \oplus \mathcal{R}(P)$ به دست آورد.)

- در حالت کلی برای $F \subseteq Y$ داریم :

$$F^{\perp} = \Big\{\lambda \in Y^{*}: < x, \lambda > = 0 \qquad (x \epsilon F)\Big\}$$

۱-۶ n-میانگین پذیری ضعیف

۱-۶-۱ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک A -مدول دوطرفه باناخ باشد، فضای اشتقاق‌های پیوسته از A به‌توی X را با $\mathcal{Z}^{1}(A,X)$ و فضای اشتقاق‌های داخلی از A به‌توی X را با $\mathcal{N}^{1}(A,X)$ نشان می‌دهیم.

اولین گروه کوهمولوژی[۷] از A با ضرایب در X را با نماد $\mathcal{H}^{1}(A,X)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{H}^{1}(A,X) := \frac{\mathcal{Z}^{1}(A,X)}{\mathcal{N}^{1}(A,X)}$$

---

[۷] First Cohomology group