بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

روش‌های گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی در حل برخی از معادلات تحولی کسری مکانی

سخنران: صفورا نوری

زمان: ۳۰/ ۶/ ۹۲ ساعت ۱۱:۳۰ صبح

مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر رضا مختاری

۲– دکتر مهدی تاتاری

۳– دکتر مهرزاد قربانی (دانشگاه صنعتی قم)

۴– دکتر رضا مزروعی سبدانی

چکیده

در این پایان‌نامه روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی را برای حل عددی معادلات انتشار کسری-مکانی و معادلات انتقال-انتشار کسری-مکانی پیاده‌سازی می‌کنیم و به طور عددی و تحلیلی خطا و پایداری روش را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: روش گالرکین ناپیوسته موضعی، معادله انتشار کسری-مکانی، معادله انتقال-انتشار کسری مکانی، انتگرال و مشتق کسری.

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

روش‌های گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی در حل برخی از معادلات تحولی کسری مکانی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

صفورا نوری

استاد راهنما

دکتر رضا مختاری

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی خانم صفورا نوری
تحت عنوان

روش‌های گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی در حل برخی
از معادلات تحولی کسری مکانی

در تاریخ ۳۰ /۶ /۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما — دکتر رضا مختاری

۲– استاد مشاور — دکتر مهدی تاتاری

۳– استاد داور۱ — دکتر مهرزاد قربانی (دانشگاه صنعتی قم)

۴– استاد داور۲ — دکتر رضا مزروعی سبدانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

سپاس گذاری

سپاس خداوندی را که نامش آرامش دهنده ی تمام قلبها و یادش شادی بخش تمام روحهاست، خداوندی که اعطا کرد به بنده اش هر آن چیزی را که در حد شعور و کمالات اوست. خداوندی که در تمام مراحل زندگی تنها یاور و پناهگاهم است و به من کمک کرد تا به این مرحله از علم دست یابم.

عاشقانه ترین آرزوها را برای کسانی می کنم که مرا تا رسیدن به این نقطه از زندگیم همراهی کردند، زمانی که نگاهم به روشنی دنیا منور شد، دستان گرمی به سویم آمدند و دستان کوچکم را گرفتند و مرا پله پله تا جایگاه امروزم پیش بردند، آن دستها، دستهای کسانی نبود جز دستان پر محبت پدر و مادرم. امروز که خداوند مقدر داشت از وجود دستان پر مهر پدری بی نصیب باشم ،بیشتر از همیشه وجودش را در قلبم احساس میکنم و در این زمان از زندگیم هزاران بار دستان مادرم و خاک مزار پدرم را بوسه باران میکنم. سپاسشان می گویم و متعهد میشوم تا هر بر هه از زمان که توان آن را دارم برای رضایتشان تلاش کنم.

سپاس از بهار زندگیم، همسر عزیزم، آنکه عاطفه ی سرشار و گرمای امید بخش وجودش، در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان من است.

سپاس فراوان و صمیمانه از استاد راهنمای ارجمندم، آقای دکتر رضا مختاری، استادی فهیده و مهربان که در لحظه لحظه انجام این پایان نامه از هیچ کمکی دریغ نکردند و دلسوزانه مرا در انجام آن یاری دادند. از پروردگار متعال برای ایشان صحت و سلامت کامل همراه با لحظه های خوش در طول زندگیشان آرزومندم.

سپاس از استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر مهدی تاتاری که علم آموزی در محضر ایشان مایه ی مباهات من است.

در آخر این موفقیت را پیشکش می کنم به وجود گرم مادرم و روح پدری که زنده است در وجودم برای همیشه.

شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

در این پایان‌نامه روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی را برای حل عددی معادلات انتشار کسری-مکانی و معادلات انتقال-انتشار کسری-مکانی پیاده‌سازی می‌کنیم و به طور عددی و تحلیلی خطا و پایداری روش را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: روش گالرکین ناپیوسته موضعی، معادله انتشار کسری-مکانی، معادله انتقال -انتشار کسری مکانی، انتگرال و مشتق کسری.

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ پیش‌گفتار

در بسیاری از علوم مختلف جواب‌های معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای نیاز می‌شود. روش‌های تحلیلی برای حل این نوع معادلات اغلب پیچیده هستند و جواب‌های دقیق همیشه موجود نیست در این میان روش‌های عددی راهی را برای پیدا کردن جواب تقریبی مسئله ارائه می‌دهند. یک روش عددی برای حل معادله‌ی دیفرانسیل، گسسته‌سازی مسئله با تعداد نامتناهی درجه‌ی آزادی و تولید یک مسئله‌ی گسسته با تعداد متناهی درجه‌ی آزادی است که جواب‌های عددی مسئله وابسته به این تعداد متناهی درجه‌ی آزادی هستند.

سه رده از روش‌های گسسته‌سازی پرکاربرد، روش‌های تفاضل متناهی، حجم متناهی و عنصر متناهی هستند. روش‌های عنصر متناهی و حجم متناهی به دلیل مناسب بودن آن‌ها برای محاسبات در دامنه‌های پیچیده، به صورت موضعی، روی شبکه‌های نامنظم و بدون ساختار، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. ترکیب ایده‌ها و تکنیک‌های روش‌های عنصر متناهی و حجم متناهی، روشی به نام روش گالرکین ناپیوسته را نتیجه می‌دهد. روش‌های گالرکین ناپیوسته که به اختصار به آن DG می‌گویند همانند روش‌های عنصر متناهی هستند با این تفاوت که از توابع پایه‌ی به طورکامل ناپیوسته استفاده می‌کنند، در این روش اغلب از چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای پیوسته به عنوان توابع پایه استفاده می‌شود. به دلیل اینکه توابع پایه می‌توانند ناپیوسته باشند، روش‌های گالرکین ناپیوسته انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به دیگر روش‌های عنصرمتناهی دارند. ایده‌ی روش گالرکین ناپیوسته در تقریب جواب یک مسئله‌ی مقدار مرزی با شرط اولیه‌ی مناسب، استفاده از توابع چندجمله‌ای قطعه‌ای روی یک شبکه‌ی عنصر متناهی و بدون نیاز به پیوستگی روی مرزهای درونی است. یک تعمیم روش گالرکین ناپیوسته در حل معادلات با مشتقات پاره‌ای از مرتبه بالاتر و وابسته به زمان، به روش گالرکین ناپیوسته موضعی معروف است. ایده‌ی روش‌های گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی بازنویسی مناسب معادله با مشتقات پاره‌ای، در دستگاه درجه اول و به دنبال آن، اعمال روش گالرکین ناپیوسته روی دستگاه معادله است. موفقیت برای چنین روش‌هایی، طراحی مناسب و صحیحی از شارهای عددی در مرزها است. این شارها برای ضمانت پایداری و قابلیت حل همه‌ی متغیرهای کمکی معرفی شده برای تقریب مشتقات جواب طراحی می‌شود. قابلیت حل

همه متغیرهای کمکی به طور موضعی، دلیلی برای نامیدن روش گالرکین ناپیوسته موضعی است [۱۳]. روش‌های گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی می‌توانند انعطاف‌پذیری روش گالرکین ناپیوسته را حفظ کنند، از آنجا که متغیرهای کمکی را می‌توان به طور موضعی حذف کرد، با این حال گاهی مواقع این متغیرهای کمکی بسیار نامطلوب هستند، زیرا موجب افزایش پیچیدگی و هزینه محاسباتی می‌شوند و بعد از حذف متغیرهای کمکی ممکن است ایجاد مشکلاتی کنند. یک روش جایگزین برای حل معادلات انتقال–انتشار درجه دوم، روش گالرکین ناپیوسته بانمن و ادن است [۲]. در این روش برای رسیدن به پایداری، نیازی به معرفی متغیرهای کمکی وابسته به سلول‌های مرزی نیست. با این حال وقتی از چندجمله‌ای‌های درجه‌ی k استفاده شود این روش نمی‌تواند به دقت قابل قبول $k+1$ برسد. همچنین، تعمیم این روش به معادلات با مشتقات پاره‌ای با مشتقات مکانی مرتبه‌ی بالا خالی از اشکال نیست. دیگر روش‌های مربوطه در خصوص مشتقات مرتبه‌ی بالا و مستقل از زمان، استفاده از روش‌های جریمه درونی است.
از آنجا که توابع پایه به طور کامل ناپیوسته هستند، روش‌های گالرکین ناپیوسته و گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی دارای مزایا و انعطاف‌پذیری خاصی نظیر موارد زیر هستند [۴۲]

۱) درجه‌ی دقت به سادگی قابل تنظیم است. در حقیقت درجه‌ی دقت را می‌توان به‌طور موضعی در هر عنصر تعیین کرد.

۲) دامنه با هندسه‌ی پیچیده و شرایط مرزی متنوع به راحتی قابل دسترسی است.

۳) ارتباطات داده‌ها موضعی است. صرف‌نظر از مرتبه‌ی دقت، ارزیابی جواب در هر عنصر فقط به همسایه‌های آن عنصر مربوط می‌شود.

۴) نامساوی‌های مورد نیاز و پایداری نسبت به نرم L^2 به سادگی قابل اثبات است [۲۶].

۵) صرف‌نظر از ساختار شبکه، برای چندجمله‌ای‌های درجه k با جواب‌های هموار، مرتبه‌ی دقت حداقل $k+\frac{1}{2}$ و اغلب $k+1$ به‌دست می‌آید.

روش گالرکین ناپیوسته دارای کاربرد قابل توجه و سریعی در زمینه‌های متنوع الکترومغناطیس، دینامیک گازی، جریان ذرات، هواشناسی، مدل‌سازی جریان آب سطحی، اقیانوس‌شناسی، شبیه‌سازی بازیابی نفت، شبیه‌سازی ابزارهای نیمه رسانا، پیش بینی آب وهوا و موارد متعدد دیگری است که بیان آنها جایگاه خود را می‌طلبد. برای توصیف مفصل روش اجرا و کاربرد آن، می‌توان از یادداشت‌های سخنرانی‌ها [۱۱]، مقالات پژوهشی [۱۲] استفاده کرد. علاوه بر کاربرد روش گالرکین ناپیوسته در شبیه‌سازی حمل و نقل نوترون معادلات دیفرانسیل عادی، تجزیه و تحلیل انتشار موج در رسانه های الاستیک از دیگر کاربردهای این روش است که در سال‌های ۱۹۷۶–۱۹۷۵ توسط ادن و ولفورد انجام شد و در سال ۱۹۷۸ توسط دلفور و همکاران به کنترل بهینه رسید.
در طرح‌های گالرکین ناپیوسته برخلاف طرح‌های گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی، نیازی به استفاده از متغیرهای کمکی نیست. در روش طراحی شده توسط چنگ و شو نیز از انتگرال‌گیری تکراری و جزء به جزء استفاده شده است و این روش بستگی به شارهای عددی انتخاب شده برای همه‌ی مشتق‌های عددی با درجات پایین‌تر از معادلات با مشتقات

پاره‌ای دارد [۸]. در مقایسه با روش‌های جریمه، این روش مزایایی از قبیل حفاظت موضعی اتوماتیک و قابلیت طراحی روش‌های گالرکین ناپیوسته پایدار برای معادلات با مشتقات پاره‌ای نوع موجی با مشتقات نظیر معادلات KdV را دارد. توجه داریم که انتخاب ساده‌ی شارهای عددی برای معادلات با مشتقات پاره‌ای مختلف برای حصول اطمینان از پایداری ضروری است.

۲.۱ تاریخچه

نخستین روش گالرکین ناپیوسته در سال ۱۹۷۳ توسط رید و هیل، در قالب انتقال نوترونی یا یک معادله هذلولوی خطی مستقل از زمان ارائه شد [۳۳]. درست یک سال قبل از معرفی روش گالرکین ناپیوسته توسط رید و هیل، هولم روشی را روی معادلات دیفرانسیل عادی به کار گرفت که در آن از شکل ضعیف به‌دست آمده در روش گالرکین ناپیوسته استفاده کرد اما با این تفاوت که از یک جواب تقریبی پیوسته‌ی u_h بهره گرفت. در سال ۱۹۷۴ لسینت و راویارت اولین آنالیز این روش را انجام دادند و ثابت کردند که نرخ همگرایی این روش اگر از چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی N استفاده شود، در حالت کلی $\mathcal{O}(h^N)$ و در حالت بهینه برای نقاط خاص $\mathcal{O}(h^{N+1})$ است. در سال ۱۹۸۱ دلفور، هاگر و تراچو یک رده‌ای از روش‌های گالرکین ناپیوسته را معرفی کردند و ثابت کردند که این روش دارای دقت حداکثر $2k+2$ در نقاط شبکه است. در سال ۱۹۸۶، جانسون و پیتکارانتا آنالیز معادله‌ی هذلولوی خطی را انجام دادند و ثابت کردند که نرخ همگرایی این روش با استفاده از چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی N و جواب دقیق به اندازه‌ی کافی هموار، در حالت کلی $\mathcal{O}(h^{N+\frac{1}{2}})$ است و در سال ۱۹۹۱ پیترسون به طور عددی نشان داد که این نرخ همگرایی بهینه است.

بهبود اصلی روش گالرکین ناپیوسته، در سال ۱۹۸۹، توسط کاکبرن و همکاران در یک سری از مقالات مانند [۱۴] و [۱۶] برای حل قانون بقای هذلولوی غیرخطی وابسته به زمان انجام شد. آن‌ها با استفاده از روش رانگ–کوتای صریح برای گسسته‌سازی زمان و گسسته‌سازی گالرکین ناپیوسته در مکان، با استفاده از حل‌کننده‌های دقیق یا تقریبی ریمان به عنوان شارهای عددی، چارچوبی برای حل این نوع مسئله‌ها فراهم کردند. این روش، گالرکین ناپیوسته‌ی رانگ–کوتا نام گرفت.

در سال ۱۹۹۲ ریچتر روش گالرکین ناپیوسته‌ی اصلی را برای معادلات انتقال–انتشار توسعه داد و ثابت کرد که اگر ضرایب چسبندگی از مرتبه‌ی اندازه‌ی شبکه باشد، مرتبه‌ی همگرایی بهینه وقتی از چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی k استفاده شود، $k+\frac{1}{2}$ است. چند سال بعد، روش‌های گالرکین ناپیوسته برای معادلات با مشتقات پاره‌ای وابسته به زمان، توسط چاونت و کاکبرن با استفاده از روش اویلر پیشرو، برای گسسته‌سازی زمان توسعه داده شد. در سال ۱۹۹۶ لین، یان و ژو اولین مرتبه‌ی همگرایی روش گالرکین ناپیوسته را با استفاده از چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای ثابت نشان دادند. پس از آن، در سال‌های ۱۹۹۸–۱۹۹۷ این روش، به روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی برای حل معادله‌ی انتقال–انتشار(حاوی مشتقات مرتبه دوم)، توسط کاکبرن و شو تعمیم داده شد [۱۳]. کار آنها تحت آزمایشات موفق عددی بایسی و ریبای برای معادلات ناویر– استوس قرار گرفت [۳]. در سال ۱۹۹۹، بابوشکا، ادن و همکاران یک روش نامتقارن گالرکین ناپیوسته برای حل طیف وسیعی از مسائل از جمله مسئله‌ی انتشار محض و مسئله‌ی انتقال–

انتشار ارائه کردند. بعدها یان و شو، یک روش گالرکین ناپیوسته موضعی برای معادله KdV حاوی مشتقات درجه سوم استفاده کردند [۳۸] و این روش را برای معادلات با مشتقات پاره‌ای، با مشتقات درجه چهارم و پنجم تعمیم دادند. لوی، شو و یان روش‌های گالرکین ناپیوسته موضعی را برای معادلات غیرخطی انتشاری که جواب‌های موجی موسوم به کامپکتون دارند، طراحی کردند [۲۹]. اخیرا اسکیلسون و شروین از روش‌های طیفی گسسته برای شبیه‌سازی معادلات خطی نوع بسینسک، معادلات بسینسک دوبعدی و دستگاه‌های جریان آب سطحی استفاده کردند [۲۲]. همچنین زو و شو، روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی را برای حل یک سری معادلات موجی غیرخطی تعمیم دادند [۴۰].

موضوع حسابان کسری یا به عبارت دیگر محاسبه‌ی انتگرال‌ها و مشتق‌ها از هر مرتبه‌ی دلخواه مختلط یا حقیقی، به اوایل قرن هفدهم برمی‌گردد. هنگامی که لایب‌نیتز نامه‌ای به هوپیتال نوشت و این سوال را مطرح کرد که آیا می‌توان مفهوم مشتقات با مرتبه‌ی عدد صحیح را به مشتقات از مرتبه‌ی غیر عدد صحیح تعمیم داد؟ هوپیتال که در مورد این سوال بسیار کنجکاو شده بود، این سوال ساده‌تر را از لایب‌نیتز پرسید: اگر مرتبه $\frac{۱}{۲}$ باشد، چه می‌توان گفت؟ لایب‌نیتز در تاریخ ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵، در نامه‌ای نوشت: این یک پارادوکس(تناقض) آشکار از چیزی است که روزی نتایج مفیدی دربر خواهد داشت. آن روز، روز تولد محاسبات کسری نام گرفت. پس از آن، موضوع حسابان کسری علاقه‌ی ریاضیدانانی همچون اویلر (۱۷۳۰)، لاگرانژ (۱۷۷۲)، لاپلاس (۱۸۱۲)، فوریه (۱۸۲۲)، لیوویل (۱۸۳۲)، ریمان (۱۸۴۷)، گریر (۱۸۵۹)، گرونوالد (۱۸۶۷)، لتنیکوف (۱۸۶۸)، ویل (۱۹۱۷)، کپوتو (۱۹۶۷) را به خود جلب کرد و این منجر به بیان تعاریف متعددی از مشتق و انتگرال کسری گردید که از معروف‌ترین این تعاریف، تعریف مشتق و انتگرال کسری ریمان-لیوویل، کپوتو و گرونوالد-لتنیکوف است.

سوالی که اکنون مطرح می‌باشد این است که "چرا محاسبات کسری؟" برای پاسخ به این سوال باید بگوییم که: برخی دستگاه‌های دینامیکی حقیقی هستند که استفاده‌ی آن‌ها از مدل دینامیک مرتبه‌ی غیر عدد صحیح بر اساس محاسبات کسری، یا تفاضلات یا انتگرال‌گیری مرتبه‌ی غیر عدد صحیح معلوم شده است. محاسبات قدیمی بر اساس تفاضلات و انتگرال‌گیری مرتبه‌ی عدد صحیح می‌باشد. مفهوم محاسبات کسری امکان تغییر آن‌چه ما می‌بینیم، مدل و کنترل طبیعت اطراف ما را دارد. نادیده گرفتن مشتقات کسری به این معنی است که بگوییم صفر، اعداد کسری و یا اعداد گنگ وجود ندارند. در این اواخر محاسبات کسری با دقت بیشتری مورد مطالعه‌ی دانشمندان قرار گرفته است. حسابان کسری کاربردهای سودمندی در فیزیک، مهندسی، ریاضیات زیستی و مالی دارد. به‌علاوه ثابت شده است که سیستم‌های بسیاری در شاخه‌های مختلف علمی به وسیله‌ی معادلات تفاضلی کسری قابل توصیف هستند مانند، موج‌های الکترومغناطیس، سیستم‌های پیچیده از بسط کوانتومی، روانشناسی و علوم زندگی [۳۶]. معادله‌های دیفرانسیل کسری در مفاهیم مختلفی توسط تعدادی از نویسندگان، مورد بررسی قرارگرفته است. وایس معادله‌ی انتشار کسری زمانی را در نظر گرفت. میناردی جواب‌های اساسی معادله‌ی کسری انتشار را با استفاده از تبدیلات لاپلاس بدست آورد. ژانگ و لیو یک تخمین متفاوتی را برای معادله‌ی انتشار کسری معرفی کردند. میرشات و تاجران روش‌های عددی را برای حل معادله‌ی انتقال-انتشار کسری مکانی یک بعدی بر روی یک دامنه‌ی متناهی نشان دادند. معادله‌ی انتقال-انتشار کسری به عنوان دیدگاه مفیدی برای توصیف حرکت(دینامیک) انتقال در دستگاه مختلطی است که با الگوهای تخفیف غیرنمایی و انتشار غیرعادی مقرر می‌شوند. با ارزش است که به پیشرفت‌های

جدید در شبیه‌سازی عددی برای معادلات انتقال-انتشارکسری اشاره کنیم. لیو و همکاران معادله انتقال-انتشارکسری مکانی به دستگاه معادله‌های دیفرانسیل معمولی انتقال می‌دهند که با فرمول‌های تفاضلی پسرو حل شده است [۳۱]. همچنین آن‌ها معادله‌ی انتقال-انتشارکسری زمانی-مکانی با مشتقات کسری زمانی کپوتو و مشتقات کسری مکانی ریمان-لیوویل بررسی کردند [۲۳]. به تازگی هشتاون و دنگ روش گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی را برای حل معادلات انتشارکسری مکانی و انتقال-انتشارکسری-مکانی به کار بردند.

۳.۱ مروری بر فصل‌ها

این پایان‌نامه در شش فصل تنظیم شده است. در فصل دوم مفاهیم مورد نیاز برای تکمیل اطلاعات، شامل فضاهای توابع، عملگر تصویر، برخی نابرابری‌های مورد نیاز و حساب‌ان کسری را بیان می‌کنیم. فصل سوم روش گالرکین ناپیوسته و گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی را توضیح می‌دهیم. فصل چهارم شامل حل عددی معادلات انتشارکسری است و در فصل پنجم حل عددی معادلات انتقال-انتشارکسری بررسی می‌شود. فصل ششم به عنوان پیوست، توضیح مختصری درباره‌ی چندجمله‌ای‌های ژاکوبی، لژاندر، انتگرال‌گیری گاوسی و مفاهیم درون‌یابی خطی و قطعه‌ای خطی می‌دهیم.

فصل ۲

مفاهیم و پیش‌نیازها

در این فصل برخی از مفاهیم و تعاریف به کار رفته در پایان‌نامه را به طور مختصر بیان می‌کنیم.

۱.۲ معرفی فضاهای توابع

برای استفاده از روش عنصر متناهی و به طور خاص روش‌های گالرکین ناپیوسته و گالرکین ناپیوسته‌ی موضعی که در این پایان‌نامه به آن می‌پردازیم، به استفاده از فضاهای تابع نیاز می‌شود. درادامه به معرفی برخی از فضاهای توابع مورد نیاز، می‌پردازیم. لازم به ذکر است که بیشتر مطالب این بخش برگرفته از [۱] و [۷] است.

۱.۱.۲ فضای توابع پیوسته

فرض کنید Ω یک دامنه در $\mathbb{R}^n$ باشد. برای هر عدد صحیح نامنفی m، $C^m(\Omega)$ فضای برداری شامل همه‌ی توابع ϕ با مشتقات پاره‌ای ، $D^\alpha\phi$، از مرتبه‌ی $|\alpha| \leq m$ روی Ω پیوسته است. به طور مختصر $C^0(\Omega)$ را با $C(\Omega)$ نشان می‌دهیم. قرار می‌دهیم $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$. زیرفضاهای $C_0(\Omega)$ و $C_0^\infty(\Omega)$، به ترتیب، شامل همه‌ی توابع در $C(\Omega)$ و $C^\infty(\Omega)$ هستند که روی مرز Ω صفر هستند.

۲.۱.۲ فضای لبگ

در این بخش، فرض می‌کنیم Ω یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^d$، $1 \leq d \leq 3$ با مرز قطعه‌ای هموار باشد. برای تابع حقیقی v روی Ω، از نماد

$$\int_\Omega v(x)dx$$

برای نمایش انتگرال f، به مفهوم لبگ استفاده می‌شود [۳۵]. برای $1 \leq q < \infty$، تعریف می‌کنیم

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |v(x)|^q dx \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

برای $q = \infty$ قرار دهید

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}\{|v(x)| : x \in \Omega\},$$

به‌طوری‌که ess sup، برای نمایش کوچکترین کران بالای اساسی استفاده شده است. حال برای $1 \leq q \leq \infty$ فضای لبگ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L^q(\Omega) = \{v : \ \|v\|_{L^q(\Omega)} < \infty \ \text{و تعریف شده است} \ \Omega \ \text{روی} \ v\}.$$

به‌عنوان مثال، برای $q = 2$، فضای $L^2(\Omega)$ شامل همه‌ی توابع مربع انتگرال‌پذیر روی Ω است.
با صرف نظر از تفاوت‌های بدیهی، برای دو تابع u و v، اگر $\|u - v\|_{L^q(\Omega)} = 0$ برقرار باشد، برای هر $x \in \Omega$ نتیجه می‌گیریم $u(x) = v(x)$، به غیر از روی مجموعه‌های با اندازه‌ی صفر.

تعریف ۱.۱.۲ فضای خطی (برداری) V را در نظر بگیرید. یک اندازه یا نرم در V، $\|.\|$، تابعی از V به $\mathbb{R}$ است به‌طوری‌که

- برای هر $v \in V$، $\|v\| \geq 0$. $\|v\| = 0$ اگر و تنها اگر $v = 0$؛
- برای هر $c \in \mathbb{R}$ و $v \in V$، $\|cv\| = |c|\|v\|$؛
- (نامساوی مثلثی) برای هر $u, v \in V$، $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

به فضای خطی V با نرم $\|.\|$، فضای خطی نرم‌دار می‌گوییم. فضای خطی V را کامل گوییم اگر هر دنباله‌ی کوشی $\{v_i\}$ در آن، به عنصر v که عضوی از V است، همگرا باشد. دنباله‌ی کوشی $\{v_i\}$ به دنباله‌ای گفته می‌شود که اگر $i, j \to \infty$، آن‌گاه $\|v_i - v_j\| \to 0$.

تعریف ۲.۱.۲ فضای خطی نرم‌دار $(V, \|.\|)$ را فضای باناخ گوییم اگر فضای V نسبت به نرم $\|.\|$ کامل باشد.
به‌ازای $1 \leq q \leq \infty$، فضای $L^q(\Omega)$ یک فضای باناخ است.

توابع در $L^q(\Omega)$ در چندین نابرابری کاربردی صدق می‌کنند که در این‌جا چند مورد از آن‌ها را بدون اثبات بیان می‌کنیم.
نامساوی هولدر: برای $1 \leq q, q' \leq \infty$، اگر $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$، آن‌گاه برای هر $u \in L^q(\Omega)$ و $v \in L^{q'}(\Omega)$، داریم

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_{L^{q'}(\Omega)}.$$

اگر $q = q' = 2$، آن‌گاه نامساوی زیر که به نامساوی کوشی یا نامساوی شوارتز معروف است، به‌دست می‌آید. برای هر $u, v \in L^2(\Omega)$ داریم

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

اگر نامساوی مثلثی را روی $L^q(\Omega)$ به کار ببریم، نامساوی مینکوسکی به‌دست می‌آید. برای هر $u, v \in L^q(\Omega)$ داریم

$$\|u + v\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^q(\Omega)} + \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

۳.۱.۲ مشتقات ضعیف

فرض کنید $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ یک d تایی است به‌طوری‌که α_iها، $1 \leq i \leq d$، اعداد صحیح و نامنفی هستند و $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$ برابر با طول α است. مشتقات پاره‌ای v را با نماد زیر نشان می‌دهیم

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_d} x_d}.$$

به عنوان مثال، اگر قرار دهیم $d = 2$، آن‌گاه $D^\alpha v$ مشتق دوم پاره‌ای v است به طوری‌که $\alpha = (1, 1)$، $\alpha = (0, 2)$ یا $\alpha = (2, 0)$.

در محاسبات، مشتقات یک تابع به صورت نقطه‌ای تعریف شده است. شکل تغییراتی در روش عنصر متناهی به صورت کلی یا به عبارت دیگر، برحسب انتگرال‌های روی Ω داده می‌شود و نیازی به مقادیر نقطه‌ای مشتق نیست. تنها مشتقاتی را که می‌توان به عنوان تابعی از فضای لبگ تعریف کرد، مورد استفاده قرار می‌گیرند. حال طبیعی است که یک تعریف مناسب‌تر برای مشتق در فضای لبگ ارائه کنیم.

برای تابع پیوسته‌ی تعریف شده روی Ω، تکیه‌گاه(محمل) v مجموعه‌ی بسته (باز) $\{v : \; v(x) \neq 0, \; x \in \Omega\}$ است. اگر این مجموعه فشرده، (کران‌دار) باشد، می‌گوییم v در Ω دارای محمل فشرده است. هم‌چنین کران‌داری Ω معادل است با این که بگوییم v در یک همسایگی مرز Γ از Ω به صفر میل می‌کند.

برای $\Omega \subset \mathbb{R}^d$، $\mathcal{D}(\Omega)$ یا $C_0^\infty(\Omega)$ زیرمجموعه‌ای از $C^\infty(\Omega)$ (فضای خطی توابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر) است و شامل توابعی است که دارای محمل فشرده در Ω هستند. از فضای $\mathcal{D}(\Omega)$ برای معرفی مفهوم مشتقات ضعیف استفاده می کنیم.

فضای تابع زیر را در نظر بگیرید

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{v : v \in L^1(K) \text{ فشرده در } \Omega \text{ داشته باشیم } K \text{ برای هر}\}.$$

توجه کنید که $L^1_{(loc)}(\Omega)$ شامل توابع $C^0(\Omega)$ (تمام توابع پیوسته روی Ω) است.

تعریف ۳.۱.۲ گوییم تابع $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ دارای مشتق ضعیف $D^\alpha_w v$ است، هرگاه تابع $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ موجود باشد

به‌طوری‌که به ازای هر $\varphi \in D(\Omega)$، داشته باشیم

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)D^\alpha\varphi(x)dx.$$

اگر چنین تابع u وجود داشته باشد، می‌نویسیم $D_\omega^\alpha v = u$.

برای هر دنباله‌ی α، اگر $v \in C^{|\alpha|}(\Omega)$، آنگاه مشتقات ضعیف $D_\omega^\alpha v$ موجود و برابر $D^\alpha v$ است. از بیان تفاوت‌های تعاریف D_ω^α و D^α صرف‌نظر می‌کنیم. به عبارت دیگر، اگر مشتقات کلاسیک وجود نداشته باشد، نماد D^α بیان‌گر مشتق ضعیف است.

مثال ۴.۱.۲ به عنوان یک مثال ساده فرض می‌کنیم $d = 1$ و $\Omega = (-1, 1)$. هم‌چنین فرض می‌کنیم $v(x) = 1 - |x|$. در این صورت تابع $D^1 v$ موجود و برابر است با

$$u(x) = \begin{cases} -1, & x > 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

در حقیقت برای $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$، داریم

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} v(x)\frac{d\varphi}{dx}(x) &= \int_{-1}^{0} v(x)\frac{d\varphi}{dx}(x) + \int_{0}^{1} v(x)\frac{d\varphi}{dx}(x) \\ &= [v\varphi]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}(+1)\varphi(x)dx + [v\varphi]_0^1 - \int_0^1(-1)\varphi(x)dx \\ &= -\int_{-1}^{1} u(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

دقت کنید که v در نقطه‌ی صفر به طور کلاسیک مشتق‌پذیر نیست، اما مشتق ضعیف اول آن موجود است. می‌توان نشان داد مشتقات $D^i v$ از مرتبه‌ی $i \geq 2$ وجود ندارد.

۴.۱.۲ فضای سوبولف

حال از مشتقات ضعیف برای تعمیم فضای لبگ، استفاده می‌کنیم. فرض کنید $r = 1, 2, \ldots$ و $v \in L^1_{loc}(\Omega)$. هم‌چنین فرض کنید مشتقات ضعیف $D^\alpha v$ به ازای هر α، $|\alpha| \leq r$، وجود دارد. با فرض $1 \leq q < \infty$ ، نرم سوبولف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|v\|_{w^{r,q}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha v\|^q_{L^q(\Omega)})^{\frac{1}{q}}.$$

برای $q=\infty$ نیز تعریف می‌کنیم

$$\|v\|_{w^{r,\infty}(\Omega)} = \max{}_{|\alpha|\leq r}\|D^{\alpha}v\|_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

به ازای $1 \leq q \leq \infty$، فضای سوبولف به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W^{r,q}(\Omega) = \{v \in L^{1}_{loc}(\Omega) : \|v\|_{W^{r,q}(\Omega)} < \infty\}.$$

به راحتی می‌توان دید که $\|.\|_{W^{r,q}(\Omega)}$ یک نرم است. به علاوه فضای سوبولف $W^{r,q}(\Omega)$، فضای باناخ نیز هست. برای $q=2$، از نمادهای زیر استفاده می‌کنیم

$$H^r(\Omega) = W^{r,2}(\Omega),\ H^r_{\circ}(\Omega) = W^{r,2}_{\circ}(\Omega), \quad r = 1,2,3,\dots\ .$$

این بدان معنی است که توابع $H^r(\Omega)$ همراه با مشتقات $D^{\alpha}v$، $|\alpha| \leq 2$، در Ω مربعی انتگرال‌پذیر هستند. توجه داریم که $H^{\circ}(\Omega) = L^{2}(\Omega)$.

تعریف ۵.۱.۲ فرض می‌کنیم که $-\infty \leq a < b \leq \infty$. از نماد $L^p(a,b;B)$ برای نشان دادن فضای برداری توابع اندازه‌پذیر f روی بازه‌ی (a,b) به B استفاده می‌کنیم، به طوریکه $\|f(.)\|_B \in L^p(a,b)$. فضای $L^p(a,b;B)$ یک فضای باناخ نسبت به نرم زیر است

$$\|f;L_p(a,b;B)\| = \begin{cases} \left\{\int_a^b \|f(t)\|_B^p dt\right\}^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{t\in(a,b)}\|f(t)\|_B & p = \infty. \end{cases}$$

فرض می‌کنیم $T > \circ$ یک زمان ثابت و $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ دامنه‌ی مسئله باشد. قرار دهید $Q := (\circ,T)\times\Omega$. تابع حقیقی مقدار $u(x,t)$ روی Q به عنوان تابعی از t با مقادیر در فضای باناخ V که تنها شامل توابع وابسته به x است را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۹]

$$u : (\circ,T) \to V, \qquad t \mapsto u(t,.) \in V.$$

مشابه با تعریف فضای توابع برای تابع حقیقی مقدار، فضاهای زیر را تعریف می‌کنیم

- فضاهای لبگ

برای $1 \leq p \leq \infty$، $L^p(\circ,T;V)$ را به عنوان فضای همه‌ی توابع V–مقدار روی $(\circ,T)$ تعریف می‌کنیم که در