
بسم الله الرحمن الرحیم
١٣٧٣

دانشکده علوم پایه
گروه فیزیک

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش نظری

عنوان پایان‌نامه:
حالت های همدوس و کوانتش یک ذره در چاه کوانتومی

استاد راهنما:
دکتر اردشیر رابعی

نگارش:
رویا فامیلی

اسفند ۱۳۹۳

دانشکده علوم پایه
گروه فیزیک

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک گرایش نظری

نام دانشجو
رویا فامیلی

تحت عنوان
حالت‌های همدوس و کوانتش یک ذره در چاه کوانتومی

در تاریخ ۹۳/۱۲/۰۴ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه **عالی** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنما	دکتر اردشیر رابعی	با مرتبه‌ی علمی استادیار	امضاء:
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر محمد وحید تکوک	با مرتبه‌ی علمی استاد	امضاء:
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر کیومرث منصوری	با مرتبه‌ی علمی استادیار	امضاء:

ما داریم در اطلاعات غرق می شویم اما دچار قحطی خردمندی، هستیم. زین پس جهان را ترکیب گرها خواهند راند، مردمی که می توانند اطلاعات درست را در زمان مناسب کنار هم قرار دهند، نقادانه درباره اش بیندیشند و عاقلانه تصمیمات مهم بگیرند.

(ادوارد ویلسون)

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوند حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر اردشیر رابعی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

بر خود لازم می‌دانم که از دوستان عزیزم خانم‌ها: ماندانا صفری، مژگان روستایی،سمیه مرادقلیئی، شیدا فخری، کتایون غلامی ، زهره ایزدی، سحر بهپور به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان و جناب آقای مهدی اکرمی به خاطر کمک‌های بسیارشان به این‌جانب تشکر کنم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر عزیزتر از جانم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس عزیزشان را که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

رویا فامیلی

اسفند ۱۳۹۳

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

چکیده

در این رساله ابتدا با توجه به اهمیت و کاربرد بسیاری از مفاهیم ریاضی، به بررسی اصول و مقدمات فضای هیلبرت می‌پردازیم. از آن‌جایی که فضای هیلبرت متناهی و نامتناهی در مکانیک کوانتومی دارای کاربرد گسترده‌ای می‌باشد، ورود ریاضیات در حوزه کوانتوم به طور کامل صورت نگرفته و دارای نواقص و اشکالاتی است. برای مثال در بررسی خودالحاقی بودن عملگرها در محدوده معین مانند چاه پتانسیل نامتناهی شرط خودالحاقی بودن با تناقضاتی روبه‌رو می‌شود که ریشه در بررسی عمیق‌تر جنبه ریاضی موضوع، تعریف عملگرهای مورد نیاز و تعیین دامنه مشخص برای آن‌ها دارد. از جمله عملگرهای کاربردی و مهم در مکانیک کوانتومی عملگر تکانه می‌باشد که به‌خاطر تعریفش به‌صورت یک عملگر دیفرانسیلی، عملگری بی‌کران است. به‌منظور رهایی از مشکل خودالحاقی بودن در محدوده معین، با توجه به مبحث اندیس‌های کمی وان نیومون، توسیع خودالحاقی برای عملگر تکانه درنظر می‌گیریم. در این راستا از مبحث حالت‌های همدوس استفاده می‌نماییم. چون حالت‌های همدوس بهترین حالت‌ها برای بیان مکانیک کوانتومی هستند، عملگرهای تعریف شده توسط این حالت‌ها در محدوده معینی مانند چاه پتانسیل نامتناهی واگرا نشده و خوش‌تعریفند. در نتیجه می‌توان از شگرد حالت‌های همدوس برای بررسی دقیق‌تر ذره در چاه پتانسیل استفاده کرد. با توجه به توصیف حرکت ذره در چاه پتانسیل به کمک حرکت ذره روی حلقه، ابتدا به مطالعه کوانتش حالت‌های همدوس ذره روی حلقه پرداخته و سپس با در نظر گرفتن فضای هیلبرت مناسب، حالت‌های همدوس ذره در چاه پتانسیل نامتناهی را معرفی می‌کنیم. این حالت‌ها باید دارای سه شرط شناخته شده نرمالیزه بودن، پیوسته بودن و برقراری رابطه همانی باشند. سپس به کوانتش مشاهده‌پذیرهای پرکاربردی مانند موقعیت، تکانه و انرژی می‌پردازیم و این مشاهده‌پذیرها را در حالت حدی تعیین می‌کنیم. در نهایت در این پایان‌نامه اصل عدم قطعیت بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی:

حالت‌های همدوس، رویه، کوانتش.

فهرست مطالب

نمادها و علایم به‌کار رفته

$\mathbb{N}$	مجموعه اعداد طبیعی
$\mathbb{R}$	مجموعه اعداد حقیقی
$\mathbb{F}$	میدان
$\mathbb{V}$	فضای برداری
$\mathbb{R}^n$	فضای حقیقی
$\mathbb{C}^n$	فضای مختلط
$\mathcal{N}$	فضاهای اندیس‌های کمی
$\|.\|$	نرم
$\langle.,.\rangle$	ضرب داخلی
$\mathcal{H}$	فضای هیلبرت
$\mathbf{X}$	فضای فاز
$\mathcal{M}$	رویه دیفرانسیل‌پذیر
$\mathcal{T}$	توپولوژی
$\mathcal{U}$	مجموعه باز
$\mathcal{R}$	قسمت حقیقی تابع
O_T	عملگر
$D(O_T)$	دامنه تعریفی برای عملگر
H	هامیلتونین
$\psi(x,t)$	تابع موج
l_c	طول مشخصه
p_c	تکانه مشخصه
H_n	چندجمله‌ای هرمیت
ψ_n	پایه‌های متعامد
$\mathcal{K}(x,z)$	کرنل
$\|\chi\rangle \equiv \|q,.\rangle$	حالت‌های همدوس
$\hbar$	ثابت پلانک
L	بعد چاه‌پتانسیل
q	موقعیت
p	تکانه
p	تکانه در نمادگذاری جان پییر گازو

ω	فرکانس
T_r	زمان تمدید
$\mathcal{P}$	احتمال به‌دست آوردن حالتی مشخص
G	گروه لی
A	بزرگترین زیرگروه آبلی
K	بزرگترین زیرگروه فشرده
N	بزرگترین زیرگروه نیلپوتنت
N	ضریب نرمالیزاسیون
ϵ	کمیتی کوچک و مثبت
F	مجموعه‌ای از ماتریس‌های حقیقی ۲×۲
$\mathcal{S}$	مجموعه متعامد معین یا نامعین

پیشگفتار

« قوانین طبیعت نمی‌توانند خطی باشند. »

آلبرت اینشتین

« با این‌که انسان‌های مختلف تصوری به‌خصوص از طبیعت دارند، طبیعت هم‌چنان هزار بار غنی‌تر است، . . . در هر یک از تئوری‌های فیزیک یک معادله (دیفرانسیل معمولی و یا با مشتقات جزئی) مطرح می‌گردد، و به جنبه‌ای جدید از آن‌ها آشنا می‌شویم . . . بدون این نظریه‌ها چیزی در مورد معادلات دیفرانسیل نمی‌دانستیم. »

هانری پوانکاره

نخستین موضوعی که به طور جامع می توان تعریف کرد، موضوع گذر از مفهوم موضعی [۱] به مفهوم سرتاسری [۲] است. در گذشته بیش‌تر تمایل افراد به بررسی اشیا در مقیاس کوچک(مختصات موضعی) بوده، اما امروزه نیاز به تحقیق و درک رفتارهای سرتاسری در مقیاس‌های بزرگ از نیازهای اصلی در شاخه‌های ریاضی و فیزیک است. از آنجایی که فهم رفتارهای کلی بسیار سخت است و بیش‌تر در سطح کیفی انجام می‌شود، ایده‌های توپولوژیکی بسیار اهمیت پیدا می‌کنند. هانری پوانکاره [۳] کسی بود که به طور جدی قدم‌های اولیه را در توپولوژی برداشت و پیش‌بینی کرد که توپولوژی یکی از مهم‌ترین ریاضیات قرن بیستم خواهد شد در صورتی که هیلبرت با بیان مسایل معروف خود در ریاضیات چنین نظری نداشت.
به منظور روشن‌تر شدن بحث، برخی از حوزه‌های ریاضی پرکاربرد در فیزیک را به عنوان مثالی برای این موضوع می‌آوریم. در آنالیز مختلط (نظریه توابع) اکثر ریاضیدانان قرن نوزدهم تابع را به عنوان موجودی یک متغیره در نظر می‌گرفتند اما برای وایراشتراوس [۴] تابع تنها یک سری توانی بود که بتوان آن را به طور صریح نوشت و توصیف کرد و یا به‌صورت فرمول ارایه داد. توابع در آن زمان فرمول‌هایی بیش نبودند که به طور صریح بیان می‌شدند. اما بعد از کارهای ریاضیدانانی همچون آبل[۵]، ریمان [۶] و پیروان آن‌ها امروزه توابع بیش‌تر با خواص سرتاسریشان تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر مهم است بدانیم که نقاط تکین کدام‌اند، دامنه تعریفشان چیست و کجا مقادیر خود را می‌گیرند. بدین ترتیب، این خواص سرتاسری مشخصه‌هایی شدند که توابع را از یکدیگر متمایز می‌کردند و در این میان بسط موضعی تنها به عنوان یکی از روش‌های بررسی توابع مطرح است.
جریانی مشابه برای معادلات دیفرانسیل نیز پیش آمد. در اصل حل یک معادله دیفرانسیل، چیزی به غیر از یافتن

Local[۱]

Global[۲]

H. Poincare[۳]

K. Weierstras [۴]

N. H. Abel[۵]

G. F. B. Riemann[۶]

جواب موضعی صریح نبود. در نتیجه پیشرفت‌های بعدی، جواب‌های غیرصریح هم ظاهر شدند ولی همواره امکان بیان آن‌ها به صورت فرمول‌هایی زیبا وجود نداشت. خواص سرتاسری یک جواب در واقع، نقاط تکین آن را معین می‌کردند و این جریان در کل مشابه اتفاقی بود که برای آنالیز مختلط افتاد هرچند در جزییات کمی متفاوت بود.

در هندسه دیفرانسیل، کارهای کلاسیک گاوس [1] و دیگران صرف مطالعه اجزای کوچک فضا، بخش‌های جزیی انحنا و معادلات موضعی شدند که هندسه موضعی را توصیف می‌کردند. در نتیجه طبیعی است که وقتی از این مقیاس‌های کوچک و موضعی وارد مقیاس‌های بزرگ می‌شویم، بخواهیم طرح سرتاسری رویه‌ها و همچنین توپولوژی آن‌ها را درک کنیم. وقتی از مقیاس کوچک‌تر و جزیی وارد مقیاس بزرگ‌تر و کلی می‌شویم، خواص توپولوژیکی مهم‌ترین مفاهیم خواهند بود. اما در فیزیک، از آن‌جایی که فیزیک کلاسیک کاملاً با بحث موضعی عجین شده است، معادله دیفرانسیلی که رفتار سیستم را کنترل می‌کند، در مقیاس کوچک توصیف می‌شود و بعد از آن باید رفتارهای سیستم فیزیکی در مقیاس‌های بزرگ را مطالعه کرد. در حقیقت کار اصلی فیزیک این است که سعی می‌کند با توجه به همه نتایج پیش‌بینی کند وقتی از یک مقیاس کوچک، جایی که رفتارها قابل فهم‌اند وارد یک مقیاس بزرگتر می‌شویم چه اتفاقی می‌افتد.

دومین موضوع قابل بررسی، بحث افزایش ابعاد است. در نظریه کلاسیک توابع مختلط، به بررسی توابع مختلط یک متغیره پرداخته می‌شد و ورود به حالت‌های دو یا چندمتغیره تقریباً در قرن بیستم اتفاق افتاد و در این حوزه ریاضیات پدیده‌های جدیدی کشف شد که غالبا با حالت‌های یک متغیره تفاوت داشتند. در نتیجه مشخصه‌های کاملاً جدیدی پدید آمدند و نظریه توابع چندمتغیره توانست موقعیت توانمندی را در ریاضیات به‌دست آورد.

به طور مشابه، در شاخه هندسه دیفرانسیل اکثر ریاضیدانان در گذشته علاقمند به خم‌ها و رویه‌ها بودند ولی امروزه به مطالعه هندسه چندبعدی چندگونه‌ها می‌پردازند. در گذشته، خم‌ها و رویه‌ها اشیایی بودند که ما می‌توانستیم به واقع در فضا ببینیم و اشیا در ابعاد بالاتر بیش‌تر اشیا شرطی بودند که آن‌ها را به عنوان اشیا ریاضی فرض می‌کردیم ولی به جد نمی‌پذیرفتیم. همچنین افزایش تعداد توابع و مطالعه چند تابع همزمان و یا به عبارت دیگر، مطالعه توابع برداری ایده روشنی نبود در حالی‌که امروزه افزایش تعداد متغیرهای مستقل و وابسته را در اغلب محاسبات شاهد هستیم.

جبر خطی همواره با متغیرهای زیادی سروکار داشت، ولی افزایش در ابعاد سبب شد جبر خطی از ابعاد متناهی به ابعاد نامتناهی و از فضاهای خطی به فضاهای هیلبرت با تعداد متغیرهای نامتناهی طی مسیر کند. البته در این جریان آنالیز نیز نقش عمده‌ای داشت. به غیر از توابع چند متغیره، می‌توانیم به تابعک‌ها اشاره داشته باشیم. تابعک‌ها توابعی روی فضای توابع می‌باشند که اصولا شامل تعداد نامتناهی متغیر بوده و قضیه آن‌ها را حساب تغییرات می‌نامند.

سومین موضوع قابل بررسی، ورود از مفهوم جابه‌جایی به مفهوم ناجابه‌جایی است و در این میان ناجابه‌جایی بسیار مهم جلوه می‌کند. جبر ناجابه‌جایی ریشه در قرن نوزدهم دارد. این ریشه‌ها که چندجانبه بوده، تاثیرات وسیعی در جهت‌گیری ایده‌های فیزیکی گذاشت. کاربرد ماتریس‌ها و ضرب ناجابه‌جایی در فیزیک با مکانیک

C. F. Gause[1]

کوانتومی آغاز شد. مهم‌ترین مثال از کاربرد اساسی جبر ناجابه‌جایی در فیزیک عبارت است از روابط جابه‌جایی هایزنبرگ که بعدها توسط وان‌نیومون در نظریه جبر عملگرها توسعه یافت.

موضوع چهارم عبور از مفهوم خطی به مفهوم غیرخطی است. اکثر بخش‌های ریاضیات در گذشته یا اساساً خطی بودند و یا اگر هم کاملا خطی نبودند تقریباً خطی بوده و به کمک اختلالات مناسب در سیستم بررسی می‌شدند. روند بررسی پدیده‌های واقعی غیر خطی با هندسه شروع می‌شود. هندسه اقلیدسی، هندسه صفحه، هندسه خطوط مستقیم همگی خطی‌اند اما با گذر از یک سری مراحل هندسه غیراقلیدسی وارد هندسه ریمانی می‌شود که اساساً غیر خطی است. در معادلات دیفرانسیل با مطالعه جدی پدیده‌های غیر خطی با یک سری پدیده‌های جدید روبه‌رو می‌شویم که در رفتارهای کلاسیک دیده نمی‌شوند. ناجابه‌جایی بودن، غیر خطی بودن از نوع خاص را تولید می‌کند.

با توجه به موضوعاتی که در حالت کلی در بالا بررسی شد رویکرد تقابلی بین هندسه و جبر وجود دارد. هرگاه بخواهید بدانید اشیا چگونه ساخته شده‌اند عملاً در جهان فیزیک و درون اشکال هندسی تفکر می‌کنید. نیوتون [1] با به‌کار بردن حساب دیفرانسیل از طریق مباحث هندسی سعی نمود مفاهیم فیزیکی را به معنی و مقصود واقعی نزدیک‌تر کند و لایب‌نیتز [2] تمام ریاضیات را طوری شکل داد که تبدیل به یک ماشین جبری بزرگ شود که دقیقاً مخالف نیوتون بود. به همین جهت نمادگذاری‌های کاملاً متفاوت آن‌ها را می‌بینیم و می‌دانیم که در جدال بزرگ بین این دو شخص، نهایتاً لایب‌نیتز پیروز شد و ما امروزه مشتق را با نماد لایب‌نیتز نشان می‌دهیم. پوانکاره [3] و هیلبرت [4] را می‌توان به نوعی پیروان نیوتون و لایب‌نیتز نامید. فکر پوانکاره بیش‌تر روح هندسی و توپولوژیکی داشته اما هیلبرت بیش‌تر در تلاش بود که ریاضیات را اصل موضوعی کرده و آن را به‌صورت قالبی محکم بیان کند.

در تلاش برای شناخت محیط اطراف و استفاده از قوه ادراکی‌مان در حقیقت به اشیا اطرافمان شکل هندسی می‌بخشیم. از سوی دیگر جبر اصولاً زمان را بررسی می‌کند. در بررسی هر قسمت از جبر به نوعی دنباله‌ای از اعمال پی‌درپی اجرا می‌شوند و این پی‌درپی بودن به معنی سروکار داشتن با زمان است. در دنیای ایستا جایی برای جبر وجود ندارد در حالی‌که هندسه ذاتاً ایستاست. جبر با محاسبه در زمان و هندسه با فضا سروکار دارد. این دو موضوع جنبه‌های مکمل دنیای ما را بر می‌شمرند. درنتیجه بحث و گفتگو در مورد مفهوم نسبی هندسه و جبر دارای اهمیت ویژه ایست.

در فیزیک مرزبندی تقریباً مشابهی بین ایده‌ها و تجربیات وجود دارد. می‌توان گفت فیزیک از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت اول نظریه‌ها، مفاهیم، ایده‌ها و عبارات هستند که به معنای وسیع تر، می‌توان آن‌ها را عبارات هندسی دانست زیرا با آن‌چه که در جهان واقعی اتفاق می‌افتد مرتبطند و قسمت دوم قوانین، اسباب و ابزار تجربی هستند که بیش‌تر محاسبات جبری را خاطرنشان می‌کنند.

---

[1] S. I. Newton

[2] G. W. Leibniz

[3] H. Poincaré

[4] D. Hilbert

فصل ۱

مقدمه:

یکی از مباحثی که در شاخه‌های مختلف فیزیک از جمله فیزیک نظری مطرح می‌شود، کوانتش مشاهده‌پذیرهای کلاسیکی است. روش‌های مختلفی برای کوانتش [۱] وجود دارد که هرکدام مزیت‌های خاص خود را دارند. ما در این‌جا به روش حالت‌های همدوس [۲] این مورد را انجام خواهیم داد. برای این‌کار تعیین زیرفضای هیلبرت [۳] و مقیاس [۴] ضروری است.

در این پایان‌نامه با توجه به اهمیت و کاربرد بسیاری از مفاهیم ریاضی و موضوعاتی که در پیش‌گفتار مطرح شد در فصل دوم به بررسی اصول و مقدمات فضای هیلبرت می‌پردازیم[۱] .

از مهم‌ترین فضاهای هیلبرت کاربردی در مکانیک کوانتومی، فضاهای انتگرال‌پذیر مجذوری می‌باشد. با توجه به کاربرد گسترده فضاهای هیلبرت متناهی و نامتناهی در مکانیک کوانتومی و در راستای بحث گسترش مفاهیم فیزیکی از حالت موضعی به حالت سرتاسری و کلی، ورود ریاضیات در حوزه کوانتوم دارای نواقص و مشکلاتی است.

از جمله آن‌که به تعریف عملگرهای کران‌دار و بی‌کران و دامنه‌ای که اغلب برای این‌گونه عملگرها درنظر گرفته می‌شود توجه نمی‌گردد. از آن‌جایی که بیش‌تر عملگرهای کاربردی در مکانیک کوانتومی مانند موقعیت، تکانه و انرژی بی‌کرانند، شرایطی که برای متقارن بودن عملگر در محدوده معین در نظر گرفته می‌شود، برای خودالحاقی بودن آن کافی نیست[۶].

درنتیجه در فصل دوم پس از معرفی فضای هیلبرت، تعریف کلی و جامعی از عملگرهای کران‌دار و بی‌کران،دامنه آن‌ها و انواع کاربردیشان را مدنظر قرار می‌دهیم و به رفع مشکل خودالحاقی بودن عملگر بی‌کران تکانه از طریق روش اندیس‌های کمی وان‌نیومون می‌پردازیم. این روش منجر به درنظرگرفتن توسیعی [۵] برای عملگر تکانه می‌شود که در محدوده معین به‌صورت حلقه U^{1} می‌باشد.

در مکانیک کلاسیک سیستم توسط نقاط فضای فاز [۶] توصیف می‌شود در حالی‌که در مکانیک کوانتومی، ویژه‌بردارهای مربوط به فضای هیلبرت معرف سیستم هستند. اما حالتی نیز وجود دارد که حاصل برهم‌نهش حالت‌های کوانتومی است و به حالت‌های کلاسیکی بسیار نزدیک است. این حالت‌ها، حالت‌های همدوس نامیده می‌شوند.

کوانتش به روش حالت‌های همدوس با روش‌های دیگر تفاوت دارد که به منظور بررسی این مطلب لازم است

---

[۱] Quantization

[۲] Coherent States

[۳] Hilbert Space

[۴] Suitable measure

[۵] Extension

[۶] Phase space

ابتدا تاریخچه‌ای از حالت‌های همدوس را بیان کنیم.
ایده حالت‌های همدوس ریشه در فیزیک کوانتومی و ارتباط آن با فیزیک کلاسیک دارد. واژه همدوس از اپتیک می‌آید و به‌صورت ویژه توسط گِلوبر [۱] در دهه ۶۰ میلادی و در ارتباط با مسئله گسیل لیزر مطرح گردید. پس از آن نیز توسط کِلودر [۲] و سادارشان [۳] توسعه یافت طوری‌که کلودر در این‌باره می‌گوید: "زبان اصلی فیزیک کوانتومی، حالت‌های همدوس می‌باشد."
به عبارت بهتر، حالت‌های همدوس علمی است که شکاف بین فیزیک کلاسیک و فیزیک کوانتومی را پر کرده و این دو را به هم پیوند می‌دهد. به کمک حالت‌های همدوس می‌توان کوانتش مشاهده‌پذیرهای کلاسیکی را برای فضاهای مختلف مورد بررسی قرار داد.
از آن جایی که حالت‌های همدوس بهترین حالت‌ها برای بیان مکانیک کوانتومی است، انتظار می‌رود عملگرهای تعریف شده بر مبنای این حالت‌ها چه در حالت کلی و چه در محدوده معین واگرا نشده و خوش‌تعریف باقی بمانند. درنتیجه این خوش‌تعریفی ، نیاز به بررسی روابط ریاضی خودالحاقی در این عملگرها نیست. در نتیجه می‌توان از شگرد حالت‌های همدوس برای بررسی دقیق‌تر ذره در چاه پتانسیل استفاده کرد.
در ادامه در فصل سوم به کمک نظریه گروه، حالت‌های همدوس را در مورد سیستم‌هایی که فضای فاز آن‌ها $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ و $S\times\mathbb{R}$ می‌باشد، معرفی می‌نماییم. برای فضای فاز نوع $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ مهم‌ترین مورد نوسانگر هماهنگ ساده می‌باشد. حالت‌های همدوس توسط نوسانگر هماهنگ ساده توسط چهار نمایش شناخته شده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$|z\rangle = e^{\frac{-|z|^۲}{۲}} \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \,.$$

که ظهور جمله ای به‌صورت توزیع گاوسی در این حالت‌ها بسیار قابل توجه است.
برای فضای فاز نوع $S\times\mathbb{R}$ می‌توان دو مورد را عنوان نمود.
مورد اول حرکت ذره جرم‌دار اسکالر روی دوسیتر [۴] $۱+۱$ می‌باشد [۲۲] . فضای فاز مورد استفاده، فضای کتانژانت $T^*(S^۱)$ است این فضا ساختار دوتایی داشته و می‌تواند به عنوان یک رویه دوتایی در نظر گرفته شود. این رویه دوتایی در حقیقت فضای فازی است که مشاهده‌پذیرهای کلاسیکی روی آن تعریف می‌شوند.
در این راستا به‌طور مختصر به معرفی عمل الحاقی [۵] و هم‌الحاقی [۶] می‌پردازیم. زیرا مدار هم‌الحاقی [۷] یک ساختار دوتایی دارد. سپس با استفاده از گروه تقارنی مورد نیاز در این حرکت فضای فاز را ایجاد می‌کنیم. در این مورد فضای فاز براساس روش تیمن [۸] با حلقه مختلط $S^۱_c$ یکریخت است.

R. J. Glauber[۱]
J R. Klauder[۲]
E C. G. Sudarshan[۳]
De sitter[۴]
Adjoint action[۵]
Coadjoint action[۶]
Coadjoint orbit[۷]
T. Thiemann[۸]

با محاسبه مولفه‌های مختلط حلقه S^1_c ، حالت‌های همدوس یک ذره جرم‌دار اسکالر روی دوسیتر ۱+۱ به‌صورت زیر استخراج می‌شود.

$$|\psi_a^\epsilon\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\sum_n e^{-\frac{\epsilon n^2}{2}} e^{np} e^{-in\beta}|n\rangle \,.$$

مورد دوم حالت‌های همدوس ذره متحرک روی حلقه می‌باشد. این حالت‌ها توسط گازو [۱] پیشنهاد شده و مورد بررسی قرار گرفته است ([۲۲]، [۲۱]) .

در این روش ابتدا به معرفی یک مجموعه با مقیاس ناوردا [۲] به عنوان فضای فاز پرداخته سپس فضای هیلبرت توابع انتگرال‌پذیر مجذوری $f(x)$ را روی آن تعریف می‌کنیم. با تعیین مجموعه‌ای متعامد در میان عناصر فضای هیلبرت انتگرال‌پذیر مجذوری، خانواده ای از حالت‌های همدوس به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$$|\mathrm{p}, q\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}(\mathrm{p})}}(\frac{\epsilon}{\pi})^{1/4}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\epsilon}{2}(\mathrm{p}-n)^2} e^{-inq}|n\rangle.$$

ضریب نرمالیزاسیون که یک دنباله تناوبی از توابع گاوسی نرمالیزه است، به‌دست می‌آید.

نشان خواهیم داد حالت‌های همدوسی که در مورد حرکت ذره جرم‌دار اسکالر روی دوسیتر ۱ + ۱ است مشابهت زیادی با حالت‌های همدوس مربوط به ذره جرم‌دار روی حلقه دارد. در ادامه به کوانتش تعدادی از مشاهده‌پذیرهای کلاسیکی پرداخته و دقیق و غیر دقیق بودن کوانتش را با توجه به تعریفی که بیان می‌شود، تعیین می‌کنیم. در نهایت مقدار چشم‌داشتی عملگرهای تکانه و موقعیت برای حالت حدی بررسی می‌شود.

با توجه به مباحث مطرح شده و مشاهده توزیع گاوسی در این پایه‌ها، می‌توان به عنوان یک رویکرد حالت‌های همدوس ذره در چاه پتانسیل را مرتبط با حالت‌های همدوس ذره روی حلقه در نظر گرفت و به جای بررسی حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ ساده اولویت را به حالت‌های همدوس ذره روی حلقه داد[۲۶].

در نتیجه این رویکرد در فصل چهار مورد بررسی قرار می‌گیرد. پس از بررسی چاه پتانسیل در کوانتوم استاندارد، فضای هیلبرت(با توجه به حرکت ذره)، به صورت فضای هیلبرت دو مولفه‌ای توابع مختلط‌مقداری اسپینوری در نظر گرفته شده و حالت‌های همدوسی به شکل زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$|\chi, \kappa\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}(\chi)}}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}_n(\chi)|n, \kappa\rangle.$$

این حالت‌ها علاوه بر داشتن پایه‌های سینوسی که در تطابق با کوانتوم استاندارد است، (با توجه به فصل سوم) قسمتی به‌صورت توزیع گاوسی نیز دارند.

همچنین در ادامه به کوانتش مشاهده پذیرهای کلاسیکی می‌پردازیم. کوانتش این مشاهده‌پذیرها از طریق رابطه زیر به‌دست می‌آید ([۲۵]، [۲۶]):

$$O_f = \sum_{\kappa=\pm}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^L f(q, \mathrm{p})|\chi, \kappa\rangle\langle\chi, \kappa|\mathrm{N}(q, \mathrm{p})dqd\mathrm{p}.$$

پس از محاسبه مشاهده‌پذیر های کوانتومی از طریق رابطه بالا، تحول زمانی عملگرهای معرفی شده توسط این حالت‌ها مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

---

[۱] J. P. Gazeau

[۲] Invariant measure

مزیت اصلی حالت‌های همدوس یک ذره در چاه پتانسیل نامحدود، معرفی پارامتر بدون دیمانسیون ρ و بررسی عملگرها و مقادیر چشمداشتی آن‌ها در حالات حدی کوچک(چاه کم‌عرض و حد کلاسیکی) و بزرگ است.
از ویژگی های مهم حالت‌های همدوس، محاسبه حداقل مقدار برای اصل عدم قطعیت می‌باشد بنابراین به محاسبه مقدار چشم‌داشتی مشاهده‌پذیرهای کوانتومی می‌پردازیم و در نهایت با استفاده از مقدار چشم‌داشتی این مشاهده‌پذیرها، کمینه بودن اصل عدم قطعیت را در حالت حدی بررسی می‌کنیم.

فصل ۲

فضای هیلبرت، فضای مورد نیاز در فیزیک