بسم الله الرحمن الرحيم

اظهارنامه

اینجانب ***الهه نعمتی زاده*** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده پایان نامه **رهیافت هایی کارا بر الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله‌ی زمانبندی پروژه با منابع محدود،** تحت راهنمایی آقای دکتر ***حامد رضا طارقیان*** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه فردوسی مشهد » و یا « Ferdowsi University of Mashhad » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوي اين اثر و محصولات آن (مقـالات مـستخرج، کتـاب، برنامـه هـاي رايانـه‌اي، نـرم افزارهـا و تجهيزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه فردوسي مشهد مي‌باشد. اين مطلب بايـد بـه نحـو مقتـضي در توليـدات علمي مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتايج موجود در رساله/پايان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمي‌باشد.

تقدیم به

وجود مقدّس پدر و مادر مهربانم

ز یزدان و از ما بر آنکس درود

که تارش خرد باشد و داد پود

ایزد منان را شاکر و سپاسگزارم که با استعانت از او والطاف بی‌کرانش توانستم این پایان‌نامه را به اتمام برسانم. بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی شائبه‌ی استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر *حامد رضا طارقیان* که از هرگونه مساعدتی در حق من دریغ نکردند قدردانی کنم. ایشان در تمام این مدت همواره با پیشنهادات ارزنده و کلام گرمشان مرا از یاس و ناامیدی دور و در مسیر گام برداشتن به جلو هدایت کردند.

از استاد محترم آقای دکتر *محمد هادی فراهی* که با خوشرویی تمام، وقت خود را برای مطالعه‌ی پیش نوشته‌هایم به من هدیه کردند، سپاسگزارم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر *علی وحیدیان کامیاد* و جناب آقای *دکتر فریدون رهبرنیا* که با دقت نظر خود، زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند، نهایت تشکر را دارم.

از استاد گرامی آقای دکتر *حسین تقی زاده‌ی کاخکی* که با کلام گیرا و دلسوزانه‌ی خود، مشوق اصلی من برای ورود به شاخه ی تحقیق در عملیات بودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از پدر و مادر عزیزم به خاطر دلسوزی ها، حمایت‌ها و تشویق‌های بی‌دریغشان، بسیار سپاسگزارم.

در نهایت از تمامی دوستانم که مرا در تمام دوره‌ی تحصیلی، به خصوص در اتمام این پایان‌نامه یاری رساندند، قدردانی می‌کنم.

بسمه تعالی .

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی دانشجویان .

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان رساله/پایان نامه: رهیافت هایی کارا بر الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله ی زمانبندی پروژه با منابع محدود

نام نویسنده: الهه نعمتی زاده

نام استاد(ان) راهنما: دکتر حامد رضا طارقیان

نام استاد(ان) مشاور: دکتر محمد هادی فراهی

دانشکده : علوم ریاضی	**گروه: ریاضی کاربردی**	**رشته تحصیلی: تحقیق در عملیات**
تاریخ تصویب: ۱۳۸۹/۲/۲۹		**تاریخ دفاع: ۱۳۸۹/۶/۳۱**
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد ●	**دکتری** ○	**تعداد صفحات: ۹۴**

چکیده رساله/پایان نامه :

مساله‌ی زمانبندی پروژه با منابع محدود ، تعیین مجموعه‌ای از متشکل از زمان شروع فعالیت‌ها است، که با تامین محدودیت‌های تقدم و تاخر از سر ریز منابع جلوگیری کند و در نهایت هدف کمینه کردن بازه‌ی زمانی اجرای این پروژه است.

الگوریتم شاخه و کران بهبود یافته برای حل این مساله که Np_hard است، استفاده می‌شود. این الگوریتم از روش‌های هرس انتقال به چپ، مقایسه و جواب جزیی مناسب، بهره می‌برد.

در انتها، روشی جدید برای محاسبه‌ی کران پایین ارایه می‌کنیم، که با شروع از انتها میزان محاسبات را کاهش می دهد. همچنین روش مقایسه‌ی جدید با ۴ شرط معرفی می‌شود. این روش، امکان کاهش تعداد مقایسه‌های لازم برای هرس گره‌ی نا مناسب را فراهم می‌آورد.

کلید واژه:

۱. کران پایین

۲. روش مقایسه

۳. الگوریتم شاخه و کران

۴. روش بازگشت به عقب

امضای استاد راهنما:

تاریخ:

بسمه تعالي

Graduate Studies Thesis\Dissertation Information
Ferdowsi university of Mashhad

Title of Thesis\Dissertation: Applicable methods on branch and bound algorithm for solving the RCPS problem.

Author: E. Nemati zadeh
Supervisor(s): Dr. H. R. Taregian
Advisor(s): Dr. M. H. Farahi

Faculty: Mathematical Science	**Department: Applied Mathematics**	**Specialization: Operations research**

Approval Date: 19 May 2010	**Defence Date: 22 September 2010**
M.Sc. ● **Ph.D.** ○	**Number of Pages: 94**

Abstract:

Resource constrained project scheduling problem is to find a set of starting times of activities, such that the precedence and resource constraints are satisfied and ultimately, the project duration is minimized.
The improved branch and bound algorithm is used to solve this Np_hard problem. Its uses three rules to prune, they are left shift, comparison, and incumbent solution methods.
Finally, we present a new suitable method for computing lower bound with starting off the end which reduces the total calculation. Also, we explain a new comparison method with 4 conditions. It provides the possibility of decreasing the numbers of needed comparisons attempt to prune inferior nodes.

Signature of Supervisor: **Date:**	**Key Words:** **1. Lower bound** **2. Comparison method** **3. Branch and bound algorithm** **4. back tracking method**

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان

رهیافت هایی کارا بر الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله ی زمانبندی پروژه با منابع محدود

استاد راهنما

آقای دکتر حامد رضا طارقیان

استاد مشاور

آقای دکتر محمد هادی فراهی

نگارش

الهه نعمتی زاده

شهریور ماه ۱۳۸۹

فهرست مطالب

فصل اول- معرفی مسأله تخصیص منابع محدود

۱ – ۱ مقدمه ۴
۱ – ۱ – ۱ انواع برنامه‌های زمانبندی اصلی ۵
۱ – ۲ انواع شبکه‌های برنامه‌ریزی از نظر ساختاری ۷
۱ – ۳ شماره‌گذاری فعالیت‌ها ۹
۱ – ۴ انواع محدودیت برای منابع ۱۰
۱ – ۴ – ۱ منابع تجدید شدنی ۱۱
۱ – ۴ – ۲ منابع تجدید نشدنی ۱۱
۱ – ۴ – ۳ منابع با محدودیت دوگانه ۱۲
۱ – ۵ رابطه‌های منطقی بین فعالیت‌ها ۱۲
۱ – ۶ انواع فعالیت‌ها ۱۴
۱ – ۷ اجرای یک فعالیت در چندین حالت ۱۵
۱ – ۸ مساله ی زمانبندی پروژه با منابع محدود (RCPSP) ۱۶
۱ – ۸ – ۱ مساله‌ی زمانبندی پروژه با منابع محدود تک حالته ۱۶
۱ – ۸ – ۲ مساله ی زمانبندی پروژه با منابع محدود چند حالته ۱۸
۱ – ۸ – ۳ مساله ی زمانبندی پروژه با منابع محدود همراه با شکستن فعالیت‌ها ۱۹
۱ – ۸ – ۴ مساله‌ی زمانبندی پروژه با منابع محدود تعمیم یافته ۲۰
۱ – ۸ – ۵ مساله ی زمانبندی چند پروژه‌ای ۲۰
۱ – ۸ – ۶ مدل مساله‌ی زمانبندی پروژه با منابع محدود به صورت مساله برنامه‌ریزی صفر و یک ۲۱

فصل دوم- روش های حل مساله ی زمانبندی پروژه با منابع محدود

۲ – ۱ روش های حل ۲۳
۲ – ۲ روش‌های تحلیلی حل مساله‌ی تخصیص منابع محدود ۲۴
۲ – ۲ – ۱ الگوریتم سیمپلکس ۲۴
۲ – ۲ – ۲ الگوریتم شاخه و کران ۲۴
۲ – ۲ – ۳ برنامه ریزی پویا ۲۵
۲ – ۳ روش‌های تقریبی حل مساله‌ی تخصیص منابع محدود ۲۵
۲ – ۳ – ۱ الگوریتم ژنتیک ۲۶

۲ – ۳ – ۲ الگوریتم جستجوی ممنوع ۲۷
۲ – ۳ – ۳ الگوریتم آنالینگ شبیه سازی شده ۲۷
۲ – ۴ تعاریف ۲۷
۲ – ۵ انواع پیاده‌سازی‌های الگوریتم شاخه و کران ۲۸
۲ – ۵ – ۱ درخت اولویت بندی ۲۹
۲ – ۵ – ۲ الگوریتم تاخیرهای متناوب ۳۲
۲ – ۵ – ۳ الگوریتم توسیع متناوب ۳۵
۲ – ۵ – ۴ الگوریتم توسیع بلوکی ۳۷
۲ – ۵ – ۵ الگوریتم حداقل مجموعه های ممنوع ۳۸

فصل سوم- الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله ی تخصیص منابع محدود

۳ – ۱ مقدمه ۴۰
۳ – ۲ پیاده سازی الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله‌ی برنامه ریزی پروژه با منابع محدود ۴۱
۳ – ۲ – ۱ الگوریتم شاخه‌زنی ۴۱
۳ – ۲ – ۲ درخت تصمیم‌گیری ۴۲
۳ – ۳ الگوریتم بهبود یافته برای حل مساله‌ی تخصیص منابع محدود ۴۳
۳ – ۴ محاسبه‌ی کران پایین ۴۴
۳ – ۴ – ۱ رویکرد استفاده از محدودیت منابع برای محاسبه‌ی کران پایین ۴۵
۳ – ۴ – ۲ رویکرد مسیر بحرانی برای محاسبه‌ی کران پایین ۴۵
۳ – ۵ روش بازگشت به عقب ۴۹
۳ – ۶ روش انتقال به چپ ۵۰
۳ – ۶ – ۱ کلیات روش انتقال به چپ ۵۰
۳ – ۶ – ۲ الگوریتم روش هرس انتقال به چپ ۵۲
۳ – ۷ روش مقایسه ۵۵
۳ – ۷ – ۱ کلیات روش مقایسه ۵۵
۳ – ۷ – ۲ روش مقایسه مبنی بر برابری کامل ۵۶
۳ – ۷ – ۳ روش مقایسه ی بل و پارک ۵۷
۳ – ۷ – ۴ روش مقایسه‌ی استینسون ۵۸
۳ – ۸ روش جواب جزیی مناسب ۵۹
۳ – ۹ الگوریتم شاخه و کران اصلاح شده ۶۰

فصل چهارم- بهبودی بر الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله ی تخصیص

۴ – ۱ روش جدید برای محاسبه‌ی کران مسیر بحرانی ۶۷

۴ – ۱ – ۱ مقدمه ۶۷
۴ – ۱ – ۲ انجام محاسبات از انتها ۶۸
۴ – ۱ – ۳ تبدیل مقادیر حاصل از محاسبات پیشرو از انتها به مقادیر حاصل از محاسبات پسرو ۷۰
۴ – ۱ – ۴ تشریح روش جدید ۷۱
۴ – ۱ – ۵ کاربرد ها ۷۴
۴ – ۲ روش مقایسه‌ی جدید ۷۴
۴ – ۲ – ۱ مقدمه ۷۴
۴ – ۲ – ۲ شرح روش مقایسه ی جدید ۷۴
۴ – ۲ – ۳ شرط‌های روش مقایسه ی جدید ۷۷

فصل پنجم- نتایج محاسباتی
۵ – ۱ مقایسه‌ی نتایج ۸۷
۵ – ۲ پیشنهاداتی برای پژوهش های بعدی ۹۰

فهرست منابع و ماخذ ۹۲

فصل ۱
معرفی مساله‌ی تخصیص منابع محدود

۱ – ۱ مقدمه

بعد از گذشت چندین سال از آغاز دوران برنامه‌های توسعه کشور به تدریج اهمیت و نقش مدیریت پروژه و برنامه‌ریزی و کنترل پروژه به عنوان یک ابزار اثر بخش در مدیریت آشکار گردید و به تدریج در پایان دهه ۷۰ با آموزش و حضور افراد تحصیل کرده و متخصص در پروژه-های ایرانی، موفقیت مدیران این پروژه‌ها نیز ارتقا یافت.

این که در نهایت یک پروژه به پایان خواهد رسید، چه هیچ برنامه‌ای نداشته باشد و چه دارای یک برنامه‌ی زمانبندی مناسب باشد، واقعیتی انکار ناپذیر است. اما تفاوت بسیار بزرگ نتایج، قابل چشم پوشی نیست. جلسات متعدد مدیران برای بازنگری در نحوه‌ی اجرا و در نهایت تاخیر زمانی و هدر رفت منابع با افزایش هزینه‌ها در پروژه‌هایی که بدون برنامه یا با یک برنامه‌ی نامناسب اجرا می‌شوند، اجتناب ناپذیر است. در حالی که با طراحی و تدوین برنامه‌های مناسب نظیر برنامه‌ی زمانبندی فعالیت‌ها، بسیاری از وقایع پروژه قبل از وقوع آنها قابل پیش بینی است و به این ترتیب با اتخاذ تصمیمات مناسب و با اعمال کنترل‌های لازم معمولا اجرای پروژه‌ها با انحرافات کمتر از معیارهای کیفی تعیین شده (مانند زمان، هزینه و کیفیت) به پیش خواهد - رفت.

برنامه‌ریزی پروژه از نظر نوع برنامه، معمولا به سه دسته تقسیم می گردد:

۱) **برنامه‌های مقدماتی**[۱] که این برنامه‌ها غالبا در زمان مناقصه و یا پیش از شروع اجرای پروژه تهیه می‌گردد. این برنامه‌ها اطلاعات بسیار کلی و البته جامع نسبت به نیازمندی-های پروژه از قبیل طول عملیات اجرای پروژه، نیروی انسانی و منابع لازم که در نهایت به تخمین بودجه‌ی مورد نیاز پروژه منجر می‌شود، ارایه می‌دهند.

۲) **برنامه‌ریزی اصلی**[۲] که در آن حجم کاری پروژه به شکل یک نمودار از فعالیت‌های مرتبط که به آن شبکه می‌گوییم، ظاهر می‌شود. در این برنامه‌ریزی اصول کنترل پروژه و تخصیص منابع اعمال شده و حاصل کار ارایه‌ی یک برنامه‌ی زمانبندی مناسب برای اداره‌ی پروژه می‌باشد.

۳) **برنامه‌های مترجم**[۳] (عملیاتی و تفصیلی) برای تبدیل برنامه‌ی زمانبندی اصلی به برنامه‌ای جهت ارایه به مجریان و دست اندر کاران پروژه است.

بنابراین یکی از مدخل‌های ورود ریاضیات در برنامه‌ریزی و کنترل پروژه، در مقطع طراحی و تدوین برنامه‌ی زمانبندی اصلی خواهد بود.

۱ – ۱ – ۱ انواع برنامه‌های زمانبندی اصلی

۱) **زمانبندی فنی**[۴] که تنها بر اساس دستورالعمل ساخت پروژه و روابط کاملا منطقی بین فعالیت‌ها تهیه شده است. اما به دلیل عدم تخصیص و تسطیح منابع، اجرایی و کاربردی نیست.

۲) **زمانبندی ایده‌آل**[۵] که در آن تخصیص منابع به فعالیت‌ها شکل منطقی گرفته و از نظر زمان و منابع بهینه است.

۳) **زمانبندی حقیقی یا حرفه‌ای**[۱] که با تسطیح منحنی نیاز در زمانبندی ایده‌آل با رعایت کلیه‌ی محدودیت‌های پیش نیازی و منابع و تمامی احتمالات ممکن از نحوه‌ی

---

[1] Outline Plan
[2] Main Plan
[3] Translator Plan
[4] Technical Schedule
[5] Ideal Schedule

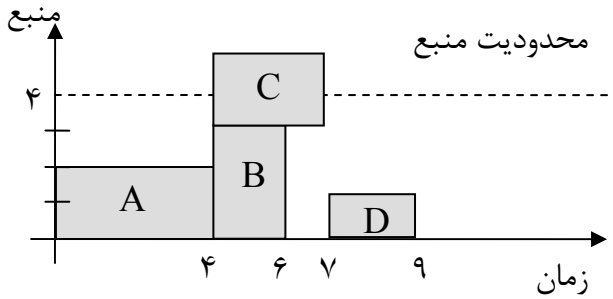
اجرای فعالیت‌ها و عدم قطعیت‌ها حاصل می‌شود، که به دلیل نزدیک بودن به واقعیت محیط اجرای پروژه از اهمیت بالایی برخوردار است.

مثال ۱ – ۱ فرض کنید فعالیت‌های یک پروژه، روابط بین آنها، مدت زمان اجرا و میزان نیاز این فعالیت‌ها به منابع به شکل زیر باشد و محدودیت منبع **۴** واحد باشد.

جدول ۱ – ۱ معرفی فعالیت‌های پروژه

فعالیت	A	B	C	D
وابستگی	–	**A**	**A**	**B,C**
مدت زمان اجرا	**۴**	**۲**	**۳**	**۲**
نیاز به منبع	**۲**	**۳**	**۲**	**۱**

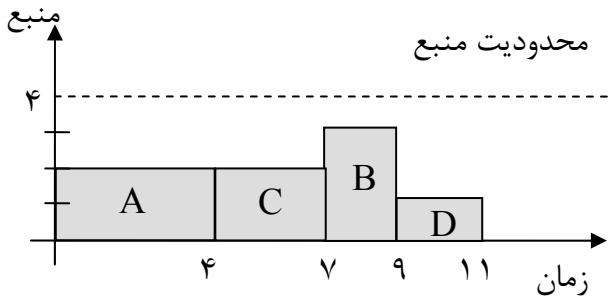
در این صورت زمانبندی فنی این پروژه تنها با توجه به مدت زمان اجرای فعالیت‌ها و روابط پیش نیازی بین آنها به شکل زیر است:



شکل ۱ – ۱ زمانبندی فنی

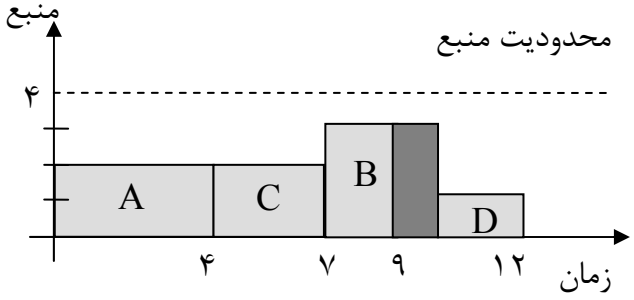
با در نظر گرفتن محدودیت منابع زمانبندی اصلی به شکل زیر حاصل می‌شود:

[1] Professional Schedule



شکل ۱ – ۲ زمانبندی اصلی

اما در زمانبندی حقیقی باید احتمال رخ داد هر یک از پیش بینی‌ها درباره‌ی طول اجرای هر فعالیت و یا منبع مورد نیاز آن را در نظر گرفت. فرض کنید احتمال رخ داد تاخیر به اندازه‌ی ۱ دوره‌ی زمانی در اجرای فعالیت B، به قدری زیاد باشد که قابل چشم پوشی نیست. بنابراین باید این تاخیر را بر زمانبندی اصلی اعمال کرده تا حاصل با واقعیت اجرای پروژه هم خوانی داشته باشد.



شکل ۱ – ۳ زمانبندی حقیقی یا حرفه‌ای

در این پایان‌نامه به بحث زمانبندی ایده‌آل برای پروژه‌ها پرداخته می‌شود.

۱ – ۲ انواع شبکه‌های برنامه‌ریزی از نظر ساختاری

به طور کلی دو نوع شبکه برای نمایش فعالیت‌های پروژه و روابط منطقی مابین آنها مطرح است.

۱) **فعالیت روی گره**[1]: شبکه‌ی فعالیت روی گره که در آن گره‌ها نماینده‌ی فعالیت‌های پروژه و یال‌ها بیانگر روابط منطقی مابین فعالیت‌ها هستند.

[1] Activity On Node Network (AONN)

۲) **فعالیت روی یال**[1]: شبکه‌های فعالیت روی یال که یال‌ها بیانگر فعالیت‌ها و گره‌ها بیانگر زمان شروع و پایان فعالیت‌ها و نحوه‌ی اتصال یال‌ها به گره‌ها بیانگر روابط تقدم و تاخر بین فعالیت‌ها است.

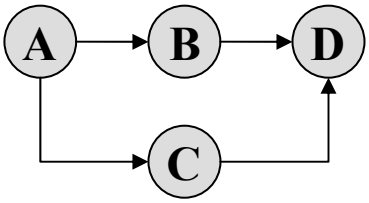
روش دوم اطلاعات بیشتری از وقایع شبکه نظیر زمان رخداد وقایع شروع یا پایان فعالیت‌ها و همین طور زمان شناوری آنها در اختیار کاربر قرار می‌دهد. اما غالبا نیاز به فعالیت‌های مجازی (فقط برای اصلاح ساختار شبکه به کار می‌روند و جزو فعالیت‌های منفک از پروژه نیستند) برای شماره‌گذاری منحصر به فرد فعالیت‌ها از معایب این روش است. در روش اول درک روابط بین فعالیت‌ها و انجام تغییرات در شبکه مثل حذف چند فعالیت از شبکه بسیار ساده‌تر خواهد بود. با توجه به مزایای نسبی روش اول در این پایان نامه روش نمایش فعالیت روی گره انتخاب می‌شود. بنابراین پروژه به صورت شبکه‌ای با گره‌هایی به تعداد فعالیت‌ها و یال‌هایی به تعداد روابط بین فعالیت‌ها نمایش داده می‌شود. همچنین از دو گره‌ی مجازی با طول زمانی صفر به عنوان فعالیت‌های ابتدایی و انتهایی پروژه که بیانگر شروع و پایان پروژه است، استفاده می‌کنیم.

مثال ۱ – ۲ فرض کنید فعالیت‌های یک پروژه و روابط بین آنها به شکل زیر باشد. نمایش این پروژه با هر دو روش را در شکل‌های زیر مشاهده می‌کنید.

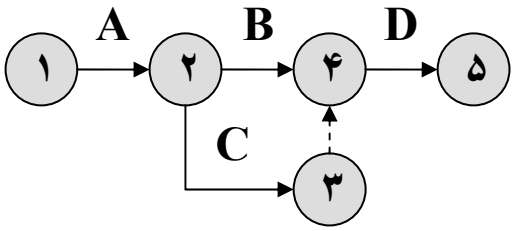
جدول ۱ – ۲ نحوه‌ی وابستگی فعالیت‌ها

فعالیت	A	B	C	D
وابستگی	–	**A**	**A**	**B,C**

[1] Activity On Arrow Network (AOAN)



شکل ۱ – ۴ شبکه فعالیت روی گره



شکل ۱ – ۵ شبکه فعالیت روی بردار

۱ – ۳ شماره‌گذاری فعالیت‌ها

شماره‌گذاری یا مرتب سازی فعالیت‌ها بر اساس سطوح شبکه، مزایای بسیاری در حل مساله و نمایش وقایع آن دارد. از آن جمله می‌توان به کاهش جستجوها برای انجام محاسبات مربوط به پیش نیازی و پس نیازی و تشخیص وجود حلقه در شبکه اشاره کرد با توجه به اینکه شرط شماره‌گذاری هر گره شماره‌گذاری پیش نیازهای بلافصل آن می‌باشد، در صورت وجود حلقه هیچ یک از فعالیت‌های حلقه شماره‌گذاری نمی‌شود بنابراین تعداد فعالیت‌های شماره‌گذاری شده از تعداد فعالیت‌های شبکه کمتر خواهد بود.

بنابراین طبق روال معمول قبل از پیاده سازی الگوریتم‌ها، ابتدا شبکه را به روش زیر به شکل ساختاری مرتب شده[1]، مرتب می‌کنیم[۲۴]. یعنی برای شبکه‌ی گراف G با n گره، با گره‌ی آغازین $n_0 = 1$ و گره‌ی پایانی n، برای هر یال (i,j) بین دو گره‌ی i و j داریم $i < j$.

برای این مرتب سازی از روش زیر استفاده می‌کنیم:

۱) از گره‌ی اصلی ،گره‌ای که هیچ یالی به آن وارد نمی‌شود، شروع و آن را با n_0 مشخص می‌کنیم.

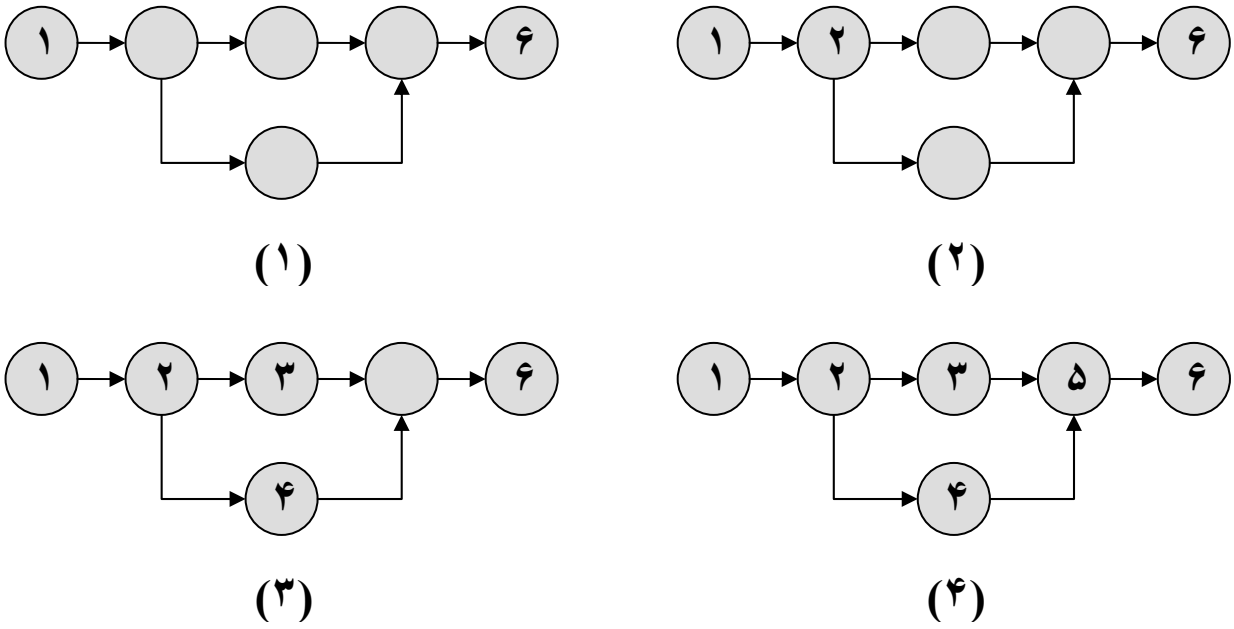
۲) تمامی یال‌هایی که از n_0 خارج می‌شوند را حذف می‌کنیم و اعداد $n_0 + 1, \ldots, n_0 + k_1$ را به گره‌هایی که هیچ یال ورودی ندارند، اختصاص می‌دهیم.

[1] Topologically ordered

۳) تمامی یال‌هایی که از گره‌هایی که در مرحله‌ی قبل شماره‌گذاری شده‌اند، خارج شـده را حذف می‌کنیم. سپس اعداد $n_0 + k_1 + 1, \ldots, n_0 + k_1 + k_2$ را به گره‌هایی که یـال ورودی ندارند، اختصاص می‌دهیم.

۴) این روش را تا جایی که همه‌ی گره‌ها شماره‌گذاری شوند ادامه می‌دهیم.

مثال ۱ – ۳ با اجرای این الگوریتم روی شبکه‌ی فعالیت روی گره‌ی مثال ۱ – ۱ به ترتیب فعالیت‌های A، B، C و D با شماره‌های ۲ تا ۵ شماره‌گذاری می‌شوند و همچنین دو فعالیت مجازی ۱ و ۶ با طول صفر به عنوان فعالیت‌های ابتدایی و پایانی شماره‌گذاری می‌شود.



شکل ۱ – ۶ شماره‌گذاری فعالیت‌ها

۱ – ۴ انواع محدودیت برای منابع

معمولا برای اجرای هر پروژه و به تبع آن فعالیت‌های پروژه، نیاز به منابع گوناگونی مانند زمان، نیروی انسانی، ابزارآلات، سرمایه، مواد اولیه، انرژی، ماشین‌آلات و ... وجود دارد. به طور

کلی از لحاظ دسترسی به منابع در طول دوره‌ی زمانی، انواع منابع به سه گروه منابع تجدید شدنی[۱] و منابع تجدید نشدنی[۲] و منابع با محدودیت دوگانه[۳] دسته‌بندی می‌شوند.

۱ – ۴ – ۱ منابع تجدید شدنی

این دسته از منابع صرف نظر از طول زمانی پروژه در هر دوره‌ی زمانی تقریبا ثابت باقی می-مانند و با مصرف آنها از میزان قابل دسترس آنها در دوره‌ی زمانی بعدی کاسته نمی‌شود و در اصطلاح در هر دوره تجدید یا احیا می‌شوند، مانند ابزار آلات و ماشین آلات. اما تنها محدودیت قابل طرح برای این نوع از منابع، محدودیت مقدار قابل دسترس آنها در هر دوره‌ی زمانی است. یعنی اگر فعالیتی در یک دوره‌ی زمانی همه‌ی منبع در دسترس را اشغال کرده بود تا زمانی که فعالیت فوق فعال است، نمی توان از این منبع برای اجرای فعالیت دیگری استفاده کرد. اما بلافاصله پس از اتمام اجرای فعالیت فوق‌الذکر این منبع به اصطلاح آزاد می‌شود و می‌توان از آن برای اجرای فعالیت‌های دیگر استفاده کرد.

۱ – ۴ – ۲ منابع تجدید نشدنی

این دسته از منابع مانند سرمایه و مواد اولیه پس از تخصیص به فعالیت‌هایی که به آنها نیاز دارند از مقدار اولیه‌ی منابع کاسته می‌شود. این منابع برعکس منابع تجدید شدنی در دوره‌ی بعدی تجدید نمی‌شوند و از میزان کل منبع، به اندازه‌ای که مصرف شده، کم می‌شود. بنابراین از میزان باقیمانده‌ی آن برای تخصیص به فعالیت‌های دیگر می‌توان استفاده کرد. علاوه بر این در هر دوره‌ی زمانی از همه‌ی منابع باقیمانده می‌توان استفاده کرد و بر خلاف محدودیت میزان دسترسی به منابع تجدید شدنی، این منابع از این نظر محدودیتی را اعمال نمی‌کنند. برای مثال میزان بودجه‌ی دریافتی را می‌توان به طور کامل در دوره‌ی زمانی اول هزینه کرد و یا در طول مدت پروژه به تناسب مورد استفاده قرار داد.

---

[1] Renewable resources
[2] Nonrenewable resources
[3] Doubly constrained resources

۱ – ۴ – ۳ منابع با محدودیت دوگانه

برای این دسته از منابع هر دو حالت تجدید شدنی و تجدید نشدنی برقرار است. یعنی میزان منابع در دسترس درهر دوره‌ی زمانی محدود است و میزان کل منبع مصرفی نیز محدود است. برای مثال فرض کنید برای اجرای یک پروژه نیاز به بودجه‌ی مشخصی است که در هر بازه‌ی زمانی تنها بخشی از آن در دسترس است و اگر از آن بهره‌برداری نشود قابل انتقال به بازه‌ی زمانی بعدی است. البته این مدل از منابع را می‌توان توسط دو مدل قبلی پوشش داد، بنابراین معمولا از بیان آن خودداری می‌شود.

۱ – ۵ رابطه‌های منطقی بین فعالیت‌ها

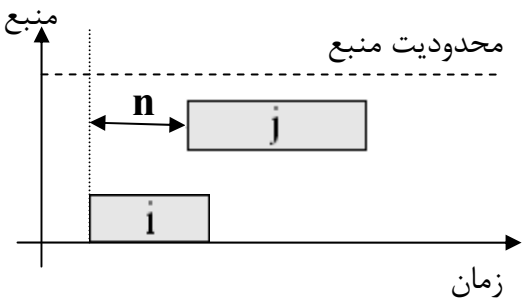
روابط منطقی بیانگر ارتباط منطقی مابین فعالیت‌ها هستند و توسط عوامل کنترل کننده در برنامه اعمال می‌شود. این روابط منطقی به دو گروه روابط کمینه و بیشینه تقسیم می‌شوند. روابط کمینه بیانگر حداقل فاصله‌ی زمانی مجاز مابین زمان شروع و پایان فعالیت‌ها و روابط بیشینه بر حداکثر فاصله‌ی زمانی مجاز مابین وقایع مذکور دلالت دارد.

فاصله‌ی زمانی، زمان تاخیر بین شروع یا پایان دو یا چند فعالیت را تعیین می‌کند. به عنوان مثال اگر شروع فعالیت i منوط به پایان فعالیت j باشد، وجود زمان تاخیر مثبت n بدین معنی است که شروع فعالیت i باید پس از گذشت حداقل یا حداکثر n واحد زمان تاخیر، پس از پایان فعالیت j باشد و این فعالیت نمی‌تواند بلافاصله پس از پایان فعالیت j شروع شود.

انواع روابط کمینه همراه با زمان تاخیر $n \geq 0$ به طوری که فعالیت i بر فعالیت j تقدم دارد، به صورت زیر است [۳۲]:

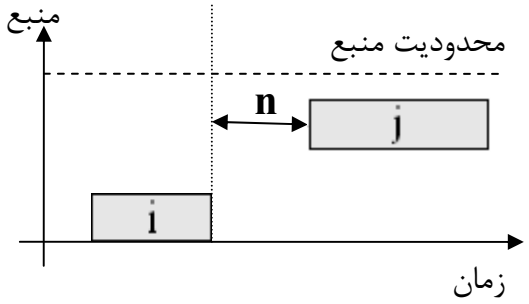
۱) **شروع – شروع**[1]: در این رابطه‌ی منطقی، شرط شروع فعالیت j، گذشت حداقل n واحد زمانی از شروع فعالیت i است. بنابراین فعالیت j نمی‌تواند شروع شود مگر این که حداقل n دوره‌ی زمانی از شروع فعالیت i سپری شده باشد.

[1] Start – Start (SS)



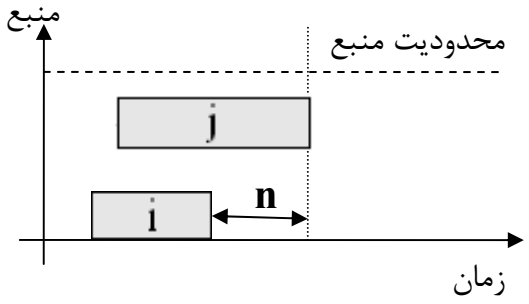
شکل ۱ – ۷ رابطه‌ی شروع _ شروع

۲) **پایان – شروع**[1]: در این رابطه‌ی منطقی، شرط شروع فعالیت j، گذشت حداقل n واحد زمانی از پایان فعالیت i است. بنابراین فعالیت j نمی‌تواند شروع شود مگر این که حداقل n دوره‌ی زمانی از پایان فعالیت i سپری شده باشد.



شکل ۱ – ۸ رابطه‌ی پایان _ شروع

۳) **پایان – پایان**[2]: در این رابطه‌ی منطقی، شرط پایان فعالیت j، گذشت حداقل n واحد زمانی از پایان فعالیت i است. بنابراین فعالیت j نمی‌تواند پایان یابد مگر این که حداقل n دوره‌ی زمانی از پایان فعالیت i سپری شده باشد.



شکل ۱ – ۹ رابطه‌ی پایان _ پایان

[1] Finish – Start (FS)
[2] Finish – Finish (FF)