بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

خم‌های شیمورا با گوناهای کوچک

دانشجو:

نرگس سخاوت

استاد راهنما:

دکتر علی رجایی

استاد مشاور:

دکترامیر جعفری

بهمن ۱۳۹۱

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم نرگس سخاوت** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۹۵۲۰۵۱۰۱۱ تحت عنوان: **«خم‌های شیمورا با گوناهای کوچک»** را در تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۲ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر علی رجایی	استادیار	
۲- استاد مشاور	دکتر امیر جعفری	استادیار	درکنفرانسی در آمریکا هستند
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۴- استاد ناظر داخلی	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۵- استاد ناظر خارجی	دکتر آرش رستگار	استادیار	
۶- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۱۳۹۱ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار ~~خانم~~/جناب آقای دکتر علی رجالی ، مشاوره سرکار ~~خانم~~/جناب آقای دکتر امیر جعفری و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ——— از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب نرگس سخاوت دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: نرگس سخاوت

تاریخ و امضا: ۹۱/۱۱/۷

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب ...نرگس بشارت... دانشجوی رشته ...ریاضی محض... ورودی سال تحصیلی ...۱۳۸۹... مقطع ...کارشناسی ارشد... دانشکده ...علوم ریاضی... متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا: ....

تاریخ: ...۹۱/۱۱/۷...

تقدیم به

پدر و مادرم

و

تمام عزیزانی که دوستشان دارم

سپاس گزاری

از استادانم *جناب آقای دکتر علی رجائی* ، که از ایشان فراوان آموخته‌ام (و می‌آموزم) و نیز *جناب آقای دکتر امیرجعفری* ، که از کمک‌های ایشان بسیار بهره برده‌ام، سپاس گزارم.

چکیده

دراین پایان‌نامه مدل پوانکاره از هندسه‌ی هذلولوی (نیم‌صفحه‌ی بالا) را تحت عمل گروه طولپاییها درنظر می‌گیریم؛ به‌ازای هر زیرگروه گسسته که عمل آن روی نیم‌صفحه‌ی بالا به‌طور سره گسسته باشد، دامنه‌ی اصلی این عمل را با توپولوژی خارج قسمتی در نظر می‌گیریم. دسته‌های خاصی از این طولپاییها اهمیت حسابی و هندسی فراوانی دارند که دراین پایان‌نامه به دو خانواده ازآنها اشاره می‌کنیم : زیرگروه‌های همنهشتی $SL(۲,\mathbb{Z})$ و زیرگروه‌های حسابی از برخی جبرهای چهارگانی روی برخی میدان‌های اعداد کاملا حقیقی. براساس قضایای مهمی در این رشته می‌دانیم که فضاهای خارج قسمتی در هر دوی این خانواده‌ها، ساختار یک خم جبری روی یک میدان اعداد دارند. در مورد خانواده‌ی اول (خم‌های مدولار کلاسیک) قضایای کلاسیک بسیاری را می‌دانیم که هنوز تمامی آنها به خانواده‌ی دوم(خم‌های شیمورا) تعمیم نیافته‌اند.

در این پایان‌نامه چگونگی شمارش تمامی خم‌های شیمورای با گونای کوچک توضیح داده شده است: ابتدا تمام مبین‌های ممکن برای جبرچهارگانی و سپس تمام ترازهایی که برای آنها، گونا حداکثر ۲ می‌باشد لیست می‌شوند.

کلمات کلیدی: زیرگروه همنهشتی $SL(۲,\mathbb{Z})$ ، زیر گروه حسابی $PSL(۲,\mathbb{R})$ ، خم مدولار، گونا، خم شیمورا، جبرچهارگانی

فهرست

لیست تصاویر

پیشگفتار

برای دادن انگیزه‌ی شناخت خم‌های شیمورا نخست خم‌های مدولار را معرفی می‌کنیم

برای هر $0 < N \in \mathbb{Z}$ زیر گروه پایین را در نظر می‌گیریم

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \ : \ c \equiv 0 (mod \ N) \right\} \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$$

گروه $\Gamma_0(N)$ بر نیم‌صفحه‌ی کامل شده‌ی بالایی [1] $H^\star = H \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ توسط تبدیلات خطی کسری [2] عمل می‌کند.

خارج‌قسمت $X_0(N) := \Gamma_0(N) \setminus H^\star$ خم مدولاری (کلاسیک)است که می‌تواند به عنوان یک رویه‌ی ریمانی فشرده در نظر گرفته شود.

خم‌های مدولار کلاسیک مربوط به زیرگروه‌های همنهشتی $PSL_2(\mathbb{Q})$ که به مدت طولانی مورد بررسی قرار گرفته بودند، دوباره علاقه‌ی تعدادی از نظریه پردازان را که هم نظری وهم محاسباتی کار می‌کردند را به خود جلب کرد.

در دهه‌ی ۶۰ قرن بیستم، شیمورا [3] در مقاله‌ی معروفش [۱۹] ، خم‌های مرتبط به جبرهای چهارگانی روی میدان‌های اعداد کاملا حقیقی را تعریف کرد که مشابه خم‌های مدولار کلاسیک مرتبط به جبر $M(2, \mathbb{Q})$ روی $\mathbb{Q}$ می‌باشند. شیمورا این خم‌های جبری خاص را به منظور

[1] completed upper half plane

[2] fractional linear transformation

[3] G.Shimura

ساختن میدان‌های رده‌ای [۴] برای میدان‌های اعداد کاملا حقیقی مورد بررسی قرار داد. این خم‌ها که بعدا خم‌های شیمورا [۵] نامیده شدند، در واقع در تعمیم ساختار $M(۲,\mathbb{Q})$ به یک جبر چهارگانی با شرایطی خاص روی یک میدان کاملا حقیقی بدست آمدند. این خم‌ها به طور گسترده توسط دلین [۶] تعمیم یافتند. در واقع دلین یک چهارچوب بدیهی برای کار شیمورا ایجاد کرد.

در مبحث خم‌های شیمورا، از شاخه‌های مختلف ریاضیات از جمله: آنالیز مختلط،
آنالیز p - ادیک، هندسه‌ی جبری، جبر و جبر ناجابه‌جایی سخن به‌میان می‌آید.
چرا خم‌های شیمورا را بررسی و مطالعه می‌کنیم؟
خم‌های شیمورا هم اکنون به عنوان خم‌هایی که شباهت زیادی به خم‌های مدولار کلاسیک دارند به رسمیت شناخته شده‌اند. دلیل دیگر مطالعه‌ی این خم‌ها این است که خم‌های شیمورا نمونه‌های شگرفی از خم‌های با گونای پایین و نگاشت‌های بین آنها ارایه می‌دهند و اخیرا نیز ساختار شگرف نقاط هیگنر [۷] که به ساختار ضرب مختلط روی خم‌های شیمورا مرتبط می‌باشند مورد بررسی قرار گرفتند.
تقریبا هر نتیجه‌ی حاصل از خم‌های کلاسیک را می‌توان با بررسی و کار بیشتر به خم‌های شیمورا تعمیم داد؛ خم‌های شیمورا در کنار خم‌های کلاسیک در یک مرحله‌ی کلیدی اثبات "آخرین قضیه‌ی فرما "ظاهر شدند [۱۵] ؛ ولی کار محاسباتی روی خم‌های شیمورا با فاصله‌ی زمانی زیادی پس از تلاش‌های گسترده بر خم‌های مدولار کلاسیک انجام شد.
پیشگامان قرن نوزدهم با همان هیجان و علاقه که صرف مطالعه‌ی $PSL_۲(\mathbb{Q})$ کردند کار روی برخی از خارج‌قسمت‌های حسابی نیم‌صفحه‌ی بالایی را که در حال حاضر آن‌ها را به عنوان

[۴] class field

[۵] Shimura curves

[۶] Deligne

[۷] Heegner point

خم‌های شیمورا به رسمیت می‌شناسیم شروع کردند.
اما در ادامه دریافتند که کار روی خم‌های شیمورا دشوارتر از کار روی خم‌های مدولار کلاسیک است. خم‌های شیمورا در مقایسه با خم‌های مدولار پرسش‌های محاسباتی سخت‌تری را مطرح می‌کردند، ولی هرگونه پاسخ کارا برای این پرسش‌ها، سود و فایده‌های بزرگی را نوید می‌داد. این خم‌ها نه تنها به این دلیل، بلکه به‌خاطر کاربردهای مستقیم، ویژگی‌هایشان و پتانسیل آنها برای بیان ایده‌های تازه در پژوهش‌های نظری، نظریه‌ی اعداد دانان را وسوسه می‌کرد.
یک خم شیمورای $X_\circ^D(\mathfrak{N}) = \Gamma_\circ^D(\mathfrak{N}) \setminus H$ عبارتست از خارج‌قسمت نیم‌صفحه‌ی بالایی H توسط گروه فوخسی حسابی [۸] $\Gamma_\circ^D(\mathfrak{N}) \subset PSL_۲(\mathbb{R})$

$\mathbb{Z}_F$ را حلقه‌ی اعداد صحیح در یک میدان کاملا حقیقی F در نظر می‌گیریم.
$\Gamma_\circ^D(\mathfrak{N})$ توسط دو ایده‌آل نسبت به هم اول $\mathfrak{N}$ و D از $\mathbb{Z}_F$ مشخص می‌شود. هر خم شیمورای $X_\circ^D(\mathfrak{N})$ در تناظر با یک زیرگروه $\Gamma_\circ^D(\mathfrak{N})$ است؛ ازاین‌روکار را روی این زیرگروه‌ها ادامه می‌دهیم.
در این پایان‌نامه خم‌های شیمورا با گونای کوچک مورد بررسی قرار می‌گیرند.
در این راستا لانگ [۹] ، مک‌لاکلند [۱۰] و رید [۱۱] قضیه‌ی زیر را ثابت کردند:

قضیه ۱.۰.۰. تعداد گروه‌های فوخسی حسابی Γ با گونای کراندار در حد تزویج، باپایان است. (ر.ک.به [۸])

پیشتر این قضیه را تامپسون [۱۲] در ساده‌ترین حالت یعنی برای زیرگروه‌های همنهشتی $PSL_۲(\mathbb{Z})$ با گونای صفر اثبات کرده بود [۲۱]. (همچنین ر.ک.به [۲]).

---

[۸] arithmetic Fuchsian group

[۹] Lang

[۱۰] Machlachlan

[۱۱] Reid

[۱۲] Thompson

در این میان تاکیوچی [۱۳] نشان داد که تعداد متناهی گروه فوخسی حسابی با نشان [۱۴] ثابت وجود دارد [۲۰] ؛ و برای نشان‌های ساده‌ی ویژه‌ای همه‌ی چنین گروه‌هایی شناسایی شده‌اند. (همچنین ر.ک.به [۹]).

لانگ و همکارانش تمام گروه‌های فوخسی حسابی ماکسیمال را با شرط $g = ۰$ و $F = \mathbb{Q}$ شمردند. همچنین فهرستی از این گروه‌ها با ویژگی $۲ \leq [F : \mathbb{Q}] \leq ۷$ ارائه دادند؛ ولی فهرست کامل برای هر گونا را ارائه ندادند.

در ادامه فهرست دیگری از کارهای انجام شده در این زمینه بیان می‌شود :

السینا [۱۵] و بی‌یر [۱۶] [۱] ، ناورداهای [۱۷] خم‌های شیمورای در تناظر با حالت‌های شاخه‌ای کوچک [۱۸] را با شرط $F = \mathbb{Q}$ ارائه کردند.

جوهانسون [۱۹] [۶] شمارشی برای همه‌ی خم‌های شیمورا با گونای $g \leq ۲$ را با شرط $F = \mathbb{Q}$ و همچنین با شرط های $[F : \mathbb{Q}] = ۲$ و $\mathfrak{N} = \mathbb{Z}_F$ ارائه داد.

در این پایان‌نامه همه‌ی گروه‌های $\Gamma_\circ^D(\mathfrak{N})$ در تناظر با خم‌های شیمورای $X_\circ^D(\mathfrak{N})$ با گونای حداکثر ۲ شمرده می‌شوند.

فرض کنید $\mathfrak{N}$ و D ایده‌آل‌هایی نسبت به هم اول از $\mathbb{Z}_F$ و نیز $\mathfrak{N}'$ و D' ایده‌آل‌هایی نسبت به هم اول از $\mathbb{Z}_{F'}$ باشند. دو خم شیمورای $X_\circ^D(\mathfrak{N})$ و $X_\circ^{D'}(\mathfrak{N}')$ را هم‌ارز گویند هرگاه یکریختی

[۱۳] Takeuchi

[۱۴] signature

[۱۵] Alsina

[۱۶] Bayer

[۱۷] invariant

[۱۸] small ramified cases

[۱۹] Johansson

$\sigma : F \longrightarrow F'$ را چنان داشته باشیم که

$$\sigma(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}'$$

$$\sigma(D) = D'$$

در این پایان‌نامه به بررسی دستآوردهای مقاله [۲۴] می‌پردازیم که برترین دستآورد آن در قضیه‌ی پایین بیان می‌شود.

قضیه ۲.۰.۰. دقیقا ۸۵۸ خم شیمورای $X_\circ^D(\mathfrak{N})$ با گونای حداکثر۲ در حد هم‌ارزی داریم.

۲۵۸ خم با گونای صفر، ۳۳۴ خم با گونای یک و ۲۶۶ خم با گونای ۲ می‌باشد.

اگر در هر کلاس یکریختی میدان یکتایی را ثابت نگه داریم ولی هیچ هم‌ارزی‌ای نداشته باشیم آنگاه دقیقا ۱۳۶۱ از این خم‌ها خواهیم داشت که ۳۳۵ تا از گونای صفر، ۵۸۸ تا از گونای یک و ۴۳۸ تا از گونای دو می‌باشد.

دراین پایان‌نامه خم‌های شیمورا با گونای کوچک در پنج بخش بررسی می‌شوند.

چیدمان پایان‌نامه بدین گونه می‌باشد

• در فصل یکم، به بیان پیش‌نیازها بر اساس مراجع [۱۱] ، [۱۲] ، [۱] ، [۵] ، [۱۷] و [۲۶] می‌پردازیم.

• فصل دوم، به تعریف جبرهای چهارگانی و ویژگیهایشان اختصاص داده می‌شود و پس از آن ساختار یک خم شیمورا و مثال‌هایی از این خم‌ها توضیح داده می‌شود.

• در فصل سوم، با به کارگیری کران سلبرگ-زگراف مساحت هذلولوی خم شیمورای $X = X_\circ^D(\mathfrak{N})$ کراندار می‌شود. از این‌رو ریشه‌ی n–ام مبین [۲۰] را که با δ_F نمایش داده می‌شود به کمک کران‌های ادلیسکو [۲۱] کراندار می‌شود و بنابراین $n = [F : \mathbb{Q}]$ کراندار می‌شود که Fمیدانی کاملا حقیقی است.

[۲۰] discriminant

[۲۱] Odlyzko bounds

• در فصل چهارم، جنبه‌های محاسباتی نشاننده [۲۲] های از رایش‌های میدان‌های درجه دوم به‌توی رایش‌های از جبر چهارگانی‌ها بررسی می‌شوند.

• در فصل پنجم، برای هر میدان ممکن F، تمام حالت‌های ممکن مبین D و تراز $\mathfrak{N}$ محاسبه می‌شوند. ازاین‌رو همگی خم‌های شیمورا $X_0^D(\mathfrak{N})$ با گونای حداکثر g شمرده می‌شوند؛ و پس از آن لیست جزئی از این خم‌های داده شده توسط جان ویت [۲۳] را ارائه می‌دهیم.

[۲۲] Embedding

[۲۳] J.Voight

فصل ۱

پیش‌نیازها

تعریف ۳.۰.۱ (جبر). فرض کنید K یک میدان و A فضایی برداری روی K با عمل دوتایی ضرب $\cdot : A \times A \to A$ باشد. A را یک جبر روی K گویند هرگاه در سه شرط زیر صدق کند

(پخش‌پذیری از راست) $\qquad \forall x, y, z \in A \qquad (x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$

(پخش‌پذیری از چپ) $\qquad \forall x, y, z \in A \qquad x\cdot (y+z) = x\cdot z + y\cdot z$

$$\forall x, y \in A \ \ \forall a, b \in K \qquad (ax)\cdot(by) = (ab)(x\cdot y)$$

A را اغلب اوقات $K-$ جبر می‌نامند.

نکته ۴.۰.۱. هر جبر یک حلقه است.

مثال ۵.۰.۱. ماتریس‌های $n \times n$ روی F

مثال ۶.۰.۱. $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{Q}$

مثال ۷.۰.۱. جبرهای چهارگانی B روی $\mathbb{Q}$

قرار دهید $K' := \{k \cdot ۱_A \ : \ k \in K\}$ ؛ از آنجایی که $K' \subseteq Z(A)$ ، اعضای K' مرکزی هستند.

تعریف ۸.۰.۱ (جبر مرکزی). K−جبر A را مرکزی گویند هرگاه $Z(A) = K'$.

تعریف ۹.۰.۱ (جبر ساده). K−جبر A را ساده گویند هرگاه به عنوان یک حلقه، هیچ ایده‌آل دوطرفه‌ی نابدیهی نداشته باشد.

در ادامه به بیان تعریف مکان [۱] می‌پردازیم.

K یک میدان اعداد [۲] (توسیع متناهی از $\mathbb{Q}$) در نظر گرفته شود. اگر r تعداد نشاننده‌های حقیقی و $2s$ تعداد نشاننده‌های مختلط K به توی $\mathbb{C}$ باشد ، داریم

$$[K : \mathbb{Q}] = r + 2s$$

مجموعه‌ی اول‌های بی‌پایان [۳] K را می‌توان برحسب نشاننده‌های حقیقی و مختلط ناحقیقی بیان کرد. ازاین رو r تا بی‌پایان حقیقی و s تا بی‌پایان مختلط داریم؛ به عبارتی K ، $r + s$ تا اول بی پایان دارد.

مثال ۱۰.۰.۱. برای $\mathbb{Q}$ یک بی‌پایان حقیقی داریم وبرای هر گسترش درجه دوم $\mathbb{Q}$ داریم

$$[K : \mathbb{Q}] = r + 2s = 2$$

اگر $r = 2$ و $s = 0$ پس ۲ بی‌پایان حقیقی داریم.
اگر $r = 0$ و $s = 1$ پس ۱ بی‌پایان مختلط داریم.

K را یک میدان اعداد و $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}_K$ را حلقه‌ی اعداد صحیح [۴] در میدان K در نظر بگیرید. ایده‌آل اول $P \neq \infty$ از $\mathcal{O}_K$ را یک "مکان متناهی" [۵] از K گویند.
بی‌پایان‌های بیان شده در بالا را "مکان‌های بی‌پایان" [۶] از K گویند. در واقع مکان‌های متناهی

[۱] place

[۲] number field

[۳] infinite places

[۴] ring of integer

[۵] finite place

[۶] infinite places