بسم الله الرحمن الرحيم

باسمه تعالی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب نساء بخشی متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن ها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و ماخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شهید رجایی می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: نساء بخشی

امضاء

دانشکده علوم پایه

قضیه شارکوفسکی

نگارش:
نساء بخشی

استاد راهنما: خانم دکتر منیره اکبری
استاد مشاور: خانم دکتر فرح بخش کمالی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض

آذر ماه ۱۳۸۹

چکیده

یکی از جالب توجه ترین نتایج در سیستم های دینامیکی گسسته یک بعدی قضیه شارکوفسکی است که به خاطر مفروضات ساده ونتایج قوی در سیستم های گسسته یک بعدی از اهمیت خاصی برخوردار است. این قضیه بیان می کند که اگر $f: I \to I$ یک نگاشت پیوسته باشد و f یک نقطه تناوبی از دوره تناوب اول m داشته باشد، آن گاه f یک نقطه تناوبی از دوره تناوب اول n که در ترتیب شارکوفسکی $m \rhd n$، دارد. عکس این قضیه می گوید که برای هر عدد صحیح مثبت r یک نگاشت پیوسته $f_r : I_r \to I_r$ روی بازه I_r وجود دارد به طوری که f_r نقاط تناوبی از دوره تناوب اول r دارد اما نقاط تناوبی از دوره تناوب اول s ندارند برای هر عدد صحیح مثبت s که جلوتر از r در ترتیب شارکوفسکی قرار دارد یعنی $s \rhd \cdots \rhd r$.

در این جا برای قضیه شارکوفسکی، حالت خاص و عکس آن اثبات هایی ارائه شده است. در یکی از آن ها وجود دور استفان و سپس قضیه شارکوفسکی را اثبات می کنیم. اثبات استاندارد را بیان می کنیم. همچنین یک اثبات از قضیه شارکوفسکی ارائه می دهیم که ساختار دو برابر کردن ترتیب شارکوفسکی را روشن می سازد. بنا بر استراتژی های مختلف چندبن اثبات گراف جهت دار و یک اثبات ساده که در آن فقط از قضیه مقدار میانی استفاده شده، برای این قضیه ارائه می دهیم.

کلید واژه‌ها:

قضیه شارکوفسکی، ترتیب شارکوفسکی، تناوب اول، تکرار، مدار

فهرست مطالب

فصل اول : قضیه شارکوفسکی

فصل دوم : عکس قضیه شارکوفسکی

فهرست شکل ها

فصل اول

قضیه شارکوفسکی

۱-۱ مقدمه

دردهه ۱۹۵۰ مقاله ای توسط کاپل[1] [۱] منتشرشد. وی دراین مقاله نشان داده بودکه تحت تکرار های یک نگاشت پیوسته روی یک بازه بسته هر نقطه به یک نقطه ثابت همگرا می شود اگر این نگاشت نقاط تناوبی ازدوره تناوب اول ۲ نداشته باشد. این یک نتیجه ساده است که عدد ۲، عدد یکی مانده به آخر در ترتیب شارکوفسکی[2] است.

در سال ۱۹۶۴ مقاله ای توسط الکساندر میکولیوویچ شارکوفسکی[3] [۲]در ژورنال ریاضی اوکراین منتشر شد. در حالی که از مقاله کاپل بی اطلاع بود. اولین بار در این مقاله قضیه شارکوفسکی[3] ارائه و اثبات شد. چون این مقاله به زبان روسی نوشته شده بود خارج از اروپای شرقی شناخته نشد. تا این که نیمه دوم دهه ۱۹۷۰ مقاله ای با عنوان "تناوب[5] ۳ آشوب[6] را ایجاد می کند [۳]" توسط تین-ین لی[7] وجیمز.ا.یورک[8] درماهنامه ریاضی آمریکا منتشر شد. لی و یورک دراین مقاله نتیجه گرفته بودند که وجود نقاط تناوبی از دوره تناوب ۳ ، وجود نقاط تناوبی از همه دوره های تناوب دیگر را ایجاب می کند. درحقیقت آنها حالت خاص قضیه شارکوفسکی را اثبات کرده بودند. بعد از مدتی این مقاله دریک کنفرانس در برلین شرقی مورد توجه قرارگرفت. دریک سفر دریایی نویسندگان مقاله با شارکوفسکی دیدارکردند. اگر چه آن ها زبان مشترکی نداشتند اما شارکوفسکی توسط ترجمه لاسوتا[9] و میرا[10] توانست نتایج خود را در مورد نقاط تناوبی نگاشت ها بر روی بازه ها به خوبی اثبات نماید. اگر چه او هیچ علاقه ای برای گفتن نتایجش نداشت. در آن زمان لی و یورک از آن نتایج آگاه نبودند.

به علاوه مطرح کردن ایده آشوب برای حضار زیاد توسط لی ویورک باعث به رسمیت شناختن جهانی کار شار کوفسکی شد. چون بیشتر مقاله ها وکنفرانس های بعد از دهه ۱۹۷۰ به تکرارها[11]، آشوب و پدیدهای وابسته اختصاص داشت، افراد زیادی روی قضیه شارکوفسکی مطالعه کردند. یکی از اهداف اولیه این مطالعات آسان تر کردن اثبات قضیه بود. اثبات های جدید فراوانی در

---

۱ - W.A.Coppel
۲ -Sharkovski's order
۳- Sharkovski's Theorem
۴-Aleksandr Mikolaiovich Sharkovski
۵ -Period
۶- Chaos
۷- Tien-Yien Li
۸ -James.A.Yorke
۹- Lasota
۱۰ -Mira
۱۱- Iterate

مقاله های مختلف ارائه شد که نسبت به اثبات های قبل مختصرتر و ساده تر بودند. از جمله پتر استفان[۱] [۴] درسال ۱۹۷۷ در مقاله ای وجود مدارهای تناوبی خاص را اثبات کرد که به آن دور استفان[۲] می گویند.

ال.بلاک[۳] و جی.گوکن هایمر[۴] و ام.میزورویچ[۵] و ال.اس یانگ[۶] [۵] درسال ۱۹۸۰ و سی.دبلیو.هو[۷] و سی.موریس[۸] [۶] در سال ۱۹۸۱ و یو.بورکارت[۹] [۷]در سال ۱۹۸۲ و پی.دی.استرافین[۱۰] [۸] در سال ۱۹۷۸ و ال.بلاک و دبلیو.ای.کاپل [۹] در مقاله های جداگانه با استفاده از وجود مدارهای استفان اثبات هایی برای قضیه ارائه دادندکه تفاوت چندانی با هم نداشتند. این اثبات به اثبات استاندارد معروف شد. در سال ۲۰۰۰ ال.آلسدا[۱۱] و جی.للیبر[۱۲] و ام.میزورویچ [۱۰] اثبات آن را تصحیح کردند و یک اثبات زیبا از قضیه شارکوفسکی را ارائه دادند. در سال ۲۰۰۷ کی.بورنز[۱۳] و بی.هاسلبلات[۱۴] [۱۱] از ساختار دو برابرکردن ترتیب شارکوفسکی استفاده کردند و اثبات را ازحالت های تناوبی فرد به حالت های تناوبی زوج توسعه دادند. این نتایج در میان خوانندگان ماهنامه ریاضی آمریکا مورد توجه واقع شده بود و موقعیت مناسبی را برای نوشتن توضیحاتی راجع به تاریخچه این قضیه زیبا فراهم کرده بود. [۱۲]

بو- سن دو[۱۵] در سال های ۲۰۰۴ [۱۳] و ۲۰۰۷ [۱۴] و ۲۰۰۹ [۱۵] اثبات هایی برای حالت معادل قضیه ارائه داد. دربعضی از این اثبات ها ازوجود دور استفان و در یکی از آن ها فقط از قضیه مقدار میانی استفاده شده است.

در این فصل ابتدا مختصری درمورد اهمیت قضیه شارکوفسکی و سپس تعریف ها و مفاهیم اولیه مورد نیاز برای اثبات های ارائه شده بیان می شود. در قسمت های ۱-۴ و۱-۵ دو اثبات مختلف برای قضیه شارکوفسکی که توسط بلاک وهمکارانش در سال ۱۹۸۰ ارائه شده می آوریم. این دو اثبات شباهت های زیادی دارند. درآن ها ایده روشن و واضح است اما جزئیات کمی پیچیده به نظر می رسند. مطالعه یک اثبات به فهم اثبات دیگر کمک زیادی می کند. در قسمت ۱-۴ ابتدا وجود دور استفان و سپس با استفاده از آن قضیه شارکوفسکی ثابت می شود. این اثبات در کتاب [۱۶] نوشته کلارک رابینسون[۱۶] و اثبات قسمت ۱-۵ در کتاب [۱۷] نوشته رابرت ال.دوینی[۱۷] آمده است. در پایان درقسمت ۱-۶ اثبات های بو-سن دو [۱۸] بیان می شود.

۱-Peter Stefan
۲- Stefan cycle
۳- L.Block
۴-J.Guckenheimer
۵- M.Misiurewicz
۶- L.S.Yorke
۷-C.W.Ho
۸-C.Morris
۹-U.Burkart
۱۰- P.D.Straffin
۱۱- L.Alseda
۱۲- J.Llibre
۱۳- K.Burns
۱۴-B.Hasselblatt
۱۵-Bau-Sen Du
۱۶- Clark Robinson
۱۷-RobertL.Devaney

۱-۲ اهمیت قضیه شارکوفسکی

قضیه شارکوفسکی فقط برای نگاشت های پیوسته که روی خط اعداد حقیقی یا روی بازه های فشرده تعریف می شوند، برقرار است. باتوجه به این که پیدا کردن دوره های تناوب یک سیستم دینامیکی آسان نیست قوی بودن نتایج قضیه مشخص می شود. این قضیه به خاطر سادگی مفروضات و فراوانی نتایج آن جذاب و قابل توجه است. قضیه شارکوفسکی فقط برای سیستم های دینامیکی یک بعدی برقرار است و برای ابعاد بالاتر قضیه مشابه وجود ندارد. به عنوان مثال نگاشتی را در نظر بگیرید که همه نقاط دایره را به اندازه ۱۲۰ درجه دوران می دهد. تحت این نگاشت همه نقاط دایره به نقاط تناوبی از دوره تناوب اول ۳ تبدیل می شوند و روی دایره نقطه تناوبی از هر دوره تناوب دیگر وجود ندارد. بنابراین قضیه شارکوفسکی برقرار نیست.

۱- ۳ تعریف ها و مفاهیم اولیه

تعریف۱-۳-۱ : فرض کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد مجموعه نقاط زیر، مدار[۱] x نامیده می شود. و با $O(x)$ نمایش می دهیم.

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), \ldots, f^n(x), \ldots$$

که در آن $f^n(x)=\overbrace{fofo\ldots of}^{n\text{مرتبه}}(x)$. اگر $f(x)=x$، x یک نقطه ثابت[۲] و اگر $f^n(x)=x$، x یک نقطه تناوبی[۳] از دوره تناوب n نامیده می شود. هرگاه n کوچکترین عدد طبیعی باشد که $f^n(x)=x$، n را دوره تناوب اول[۴] یا کوچکترین دوره تناوب[۵] x می نامند. به عبارت دیگر، n دوره تناوب اول f است اگر $f^n(x)=x$ و $f^i(x)\neq x$ به ازای هر $o<i<n$.

لم۱-۳-۲: اگر $f^n(x_o)=x_o$ ، آن گاه کوچکترین دوره تناوب x_o نسبت به f، n را می شمارد.

برهان: فرض کنیم m کوچکترین دوره تناوب x_o نسبت f باشد و بنویسیم $n=km+r$ که $o\leq r<m$، آن گاه $x_o=f^n(x_o)=f^{km+r}(x_o)=f^r(f^{km}(x_o))=f^r(x_o)$ چون m کوچکترین عدد صحیح مثبت است که $f^m(x_o)=x_o$، پس $r=o$. بنابراین m، n را می شمارد.

لم۱-۳-۳: فرض کنیم k، m، n و s اعداد صحیح مثبت باشند. گزاره های زیر برقرارند.

الف) اگر y یک نقطه تناوبی f از دوره تناوب اول m باشد، آن گاه y یک نقطه تناوبی f^n از دوره تناوب اول $m/(m,n)$ است، که (m,n) بزرگترین مقسوم علیه مشترک m و n است.

ب) اگر y یک نقطه تناوبی f^n از دوره تناوب اول k باشد، آن گاه y یک نقطه تناوبی f از دوره تناوب اول kn/s است که s، n را می شمارد و نسبت به k اول است.

برهان الف) فرض کنیم t کوچکترین دوره تناوب نقطه x_o تحت f^n باشد. چون $(f^n)^t(x_o)=f^{nt}(x_o)$ پس m ، nt را می شمارد. در نتیجه $m/(m,n)$، $nt/(m,n)$ را می شمارد. از آن جایی که $m/(m,n)$ و $n/(m,n)$ نسبت به هم اولند پس $m/(m,n)$ ، t را می شمارد. از طرف دیگر $(f^n)^{m/(m,n)}(x_o)=(f^m)^{n/(m,n)}(x_o)=x_o$. بنابراین t ، $m/(m,n)$ را می شمارد. و لذا $t=m/(m,n)$

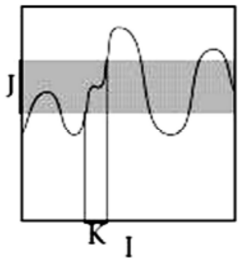
برهان ب) چون $x_o=(f^n)^k(x_o)=f^{kn}(x_o)$، با توجه به لم۱-۳-۲ ، حداقل دوره تناوب نقطه x_o تحت f، kn/s برای یک عدد صحیح مثبت s است. با توجه به قسمت الف همین لم $k=(kn/s)/(kn/s,n)$ پس $n/s=((kn/s),n)=((n/s)k,(n/s)s)=(n/s)(k,s)$. این نشان می دهد که s ، n را می شمارد و نسبت به k اول است.

۱- Obit
۲- Fixed point
۳-Periodic point
۴-Prime Period
۵- Least period

لم ۱-۳-۴: هرگاه $f:I\to I$ یک تابع پیوسته و J یک زیر بازه بسته از I و $f(J)\supset I$ در این صورت f در J دارای یک نقطه ثابت است.

برهان: فرض کنیم $J=[a,b]$. چون $f(J)\supset I\supset\{a,b\}$، نقاط p و q در $[a,b]$ وجود دارند به طوری که $f(p)=a$ و $f(q)=b$. فرض کنیم $g:I\to\mathbb{R}$ یک نگاشت پیوسته باشد که به صورت $g(x)=f(x)-x$ تعریف می شود. لذا $g(p)=f(p)-p=a-p\le 0$ و $g(q)=f(q)-q=b-q\ge 0$. با توجه به قضیه مقدار میانی، نقطه z بین p و q وجود دارد به طوریکه $f(z)-z=g(z)=0$. بنابراین z یک نقطه ثابت f در J است.

لم ۱-۳-۵: اگر I و J زیر بازه های بسته $\mathbb{R}$ باشند طوری که $f(I)\supset J$، آن گاه زیر بازه بسته K از I وجود دارد به طوریکه $f(K)=J$، $f(\partial K)=\partial J$ و $f(\operatorname{int}(K))=\operatorname{int}(J)$ که ∂K نقاط مرزی K و $\operatorname{int}(K)$ نقاط درونی K است.



شکل ۱-۱ یک مثال برای لم ۱-۳-۵

برهان: فرض کنیم $J=[a,b]$. چون $\{a,b\}\subset J\subset f(I)$، نقاط p و q در I وجود دارند به طوریکه $f(p)=a$ و $f(q)=b$. اگر $p<q$ ، فرض می کنیم $c=\max\{p\le x\le q; f(x)=a\}$ و $d=\min\{c\le x\le q; f(x)=b\}$. اگر $p>q$، فرض می کنیم $c=\max\{q\le x\le p; f(x)=b\}$ و $d=\min\{c\le x\le q; f(x)=a\}$. در هر دو حالت $K=[c,d]$. پس $f(K)=J$ و $f(\{c,d\})=\{a,b\}$. باتوجه به تعریف نقاط a و b، $f((c,d))\cap\partial J=\varnothing$. بنابراین $f(\operatorname{int}[c,d])=\operatorname{int}(J)=(a,b)$. (شکل ۱-۱ راببینید)

تعریف ۱-۳-۶: اگر I و J دو بازه باشند به طوری که $f(I)\supset J$، در این صورت می گوئیم $f(I)$، J را می پوشاند[1]. و می نویسیم $I\to J$ یا IJ.

تعریف ۱-۳-۷: اگر زیر بازه های بسته $J_0,J_1,J_2,\dots,J_n$ از I که $J_0=J_n$ وجود داشته باشند طوری که $f(J_i)\supset J_{i+1}$ برای هر $i=0,1,2,3,\dots,n-1$، آن گاه به $J_0J_1J_2\dots J_{n-1}J_0$ یک دور به طول n می گوئیم[2]. که به صورت زنجیر[3] $J_0\to J_1\to J_2\to\dots\to J_{n-1}\to J_0$ نیز نمایش داده می شود. لم زیر برای نشان دادن وجود یک نقطه تناوبی از یک دوره تناوب مفید است.

۱- I f-covers J
۲- n-cycle
۳-Loop

توجه کنید زنجیرهایی که می توان تعدادی بازه را درآن ها تکرارکرد، به عنوان مثال به صورت $J_0 \to J_1 \to J_2 \to J_1 \to J_2 \to J_0$ یا $J_0 \to J_1 \to J_2 \to \ldots \to J_{n-1} \to J_0 \to J_0 \to J_0$ هستند. به هر حال نمی توان زنجیری به صورت $J_0 \to J_1 \to J_0 \to J_1$ درنظر گرفت.

لم۱-۳-۸ : اگر $J_0 J_1 J_2 \ldots J_{n-1} J_0$ یک دور به طول n باشد، آن گاه

الف) یک نقطه تناوبی x_0 از f وجود دارد به طوریکه $f^k(x_0) \in J_k$ برای هر $k = 0,1,2,3,\ldots n-1$، و $f^n(x_0) = x_0$.

ب) به علاوه فرض می کنیم که (i) این زنجیر به صورت p مرتبه تکرار زنجیرکوتاهتر دیگری به طول m که $n = mp$، نباشد و (ii) $\operatorname{int}(J_i) \cap \operatorname{int}(J_k) = \varnothing$ اگر $j \neq k$. اگر x_0 نقطه تناوبی قسمت الف، یک نقطه درونی J_0 باشد، آن گاه x_0 دارای تناوب اول است.

برهان: قسمت الف به کمک استقراء روی j به صورت زیر ثابت می شود. جمله استقراء به صورت زیر است.

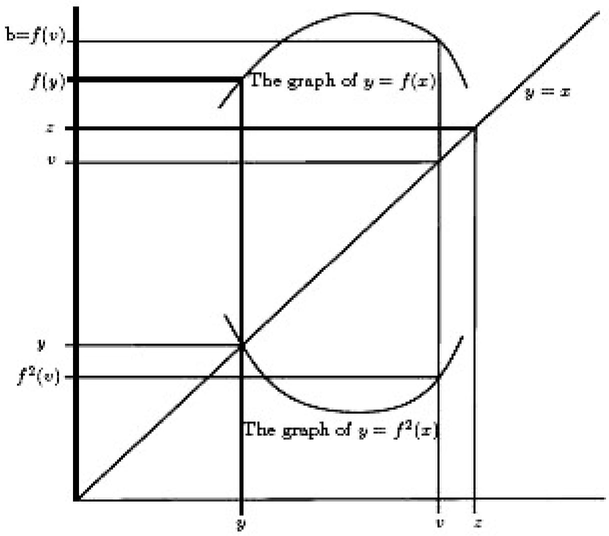
(S_j): زیر بازه $K_j \subset J_0$ وجود دارد به طوری که برای هر $i = 1,2,\ldots,j$، $f^i(K_j) \subset J_i$، $f^i(\operatorname{int}(K_j)) \subset \operatorname{int}(J_i)$ و $f^j(K_j) = J_j$.

باتوجه به لم۱-۳-۵، برای $j = 1$ استقراء بر قرار است. فرض کنیم (S_{k-1}) برقرار باشد. پس K_{k-1} وجود دارد. بنابراین $f^k(K_{k-1}) = f(f^{k-1}(K_{k-1})) = f(J_{k-1}) \supset J_k$ با توجه به لم۱-۳-۵، زیر بازه $K_k \subset K_{k-1}$ وجود دارد به طوری که $f^k(\operatorname{int}(K_k)) \subset \operatorname{int}(J_k)$ و $f^k(K_k) = J_k$. با توجه به فرض استقراء (S_{k-1}) حالت های دیگر (S_k) برقرار هستند. با استفاده از حالت (S_n)، داریم $f^n(K_n) = J_0$. با توجه به لم ۱-۳-۴، f^n دارای یک نقطه ثابت x_0 در $K_n \subset J_0$ است. زیرا $x_0 \in K_n$ و $f^i(x_0) \in J_i$ برای $i = 0,1,2,\ldots,n$ و قسمت الف اثبات می شود.

برای اثبات قسمت ب، چون $f^n(\operatorname{int}(K_n)) = \operatorname{int}(J_0)$، اگر $x_0 \in \operatorname{int}(J_0)$، آن گاه $x_0 \in \operatorname{int}(K_n)$ و $f^i(x_0) \in J_i$ برای $i = 1,2,\ldots,n$. زیرا این زنجیر به صورت p مرتبه تکرار زنجیر کوتاهتر دیگری نیست. لذا x_0 باید دوره تناوب n داشته باشد.

یادآوری : درحالت کلی نقطه x_0 مشخص شده در لم۱-۳-۸ دارای دوره تناوب اول n نیست. به هرحال با انتخاب دورهای مناسب به طول n، که شرایط آن در قسمت ب لم ۱-۳-۸ آمده است، می توان نقاط تناوبی از دوره تناوب اول n به دست آورد.

لم۱-۳-۹: فرض کنیم a و b نقاطی از I باشند به طوریکه $f(b) < a < b \leq f(a)$ یا $f(b) \leq a < b < f(a)$ آن گاه یک نقطه ثابت z از f با شرط $z < b$، یک نقطه تناوبی از دوره تناوب اول ۲ با شرط $y < z$ و نقطه $\upsilon \in (y,z)$ وجود دارند به طوری که $f(\upsilon) = b$ و



شکل ۱-۲ موقعیت نسبی نقاط $\upsilon, f(\upsilon), f^2(\upsilon), y, z$

$\max\{f^2(\upsilon), y\} < \upsilon < z < \min\{f(y), f(\upsilon)\}$. به علاوه $f(x) > z$ و $f^2(x) < x$ هرگاه $y < x \le \upsilon$.

برهان: اگر $f(b) < a < b \le f(a)$ یا $f(b) \le a < b < f(a)$، آن گاه بنا به قضیه مقدارمیانی f یک نقطه ثابت z در (a,b) و یک نقطه $\upsilon \in [a,z)$ وجود دارد به طوری که $f(\upsilon) = b > z$. اگر $f(x) > z$ وقتی که $\min I \le x \le \upsilon$، فرض می کنیم $u = \min I$، در غیر این صورت $u = \max\{x; \min I \le x \le \upsilon, f(x) = z\}$. آن گاه $f^2(u) \ge u$ و $f(x) > z$ وقتی $u < x \le \upsilon$.

از آن جایی که $f^2(\upsilon) < \upsilon$، f یک نقطه تناوبی از دوره تناوب اول ۲ در $[u,\upsilon)$ دارد، اگر y بزرگترین نقطه تناوبی از دوره تناوب اول ۲ در $[u,\upsilon)$ باشد، آن گاه $u \le y < \upsilon < z < f(y)$. و در نهایت، چون $f^2(\upsilon) < \upsilon$ داریم $f^2(x) < x$ برای هر $x \in (y,\upsilon]$.

لم ۱-۳-۱۰: اگر نقطه ثابت z^* برای f، یک نقطه c و یک عدد صحیح $n \ge 2$ وجود داشته باشند به طوریکه $f(c) < c < z^* < f^n(c)$، آن گاه یک نقطه ثابت $\tilde{z}$ از f و یک نقطه d وجود دارند به طوریکه $f(d) < d < \tilde{z} < f^2(d)$.

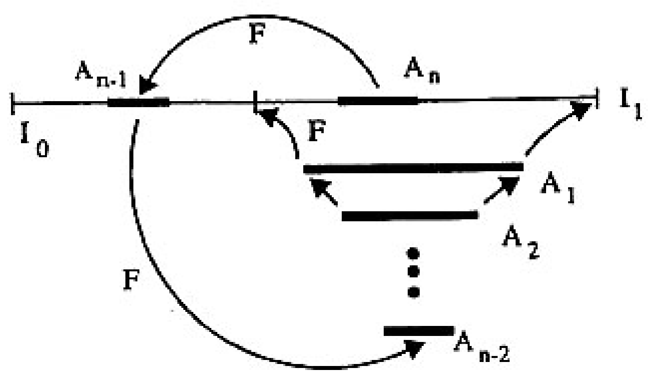
برهان: اگر $n = 2$، حکم بدیهی است. اگر $c < f^2(c) < f^3(c)$، آن گاه یک نقطه ثابت $\tilde{z}$ از f در $(c, f^2(c))$ وجود دارد و اثبات تمام است. اگر $f^2(c) < f(c)$، فرض می کنیم $\bar{c} = f(c)$. اگر $f(c) < f^2(c) < c$، فرض می کنیم $\bar{c} \in (c, z^*)$ به طوری که $f(\bar{c}) = f^2(c)$. اگر $c < f^2(c) < z^*$ و $f^3(c) < f^2(c)$، فرض می کنیم $\bar{c} \in (f^2(c), z^*)$ به طوریکه $f(\bar{c}) = f^2(c)$. در هر حالت داریم $f(\bar{c}) < \bar{c} < z^* < f^{n-1}(\bar{c})$. بنابراین به استقراء یک نقطه ثابت $\tilde{z}$ از f و یک نقطه d وجود دارند به طوریکه $f(d) < d < \tilde{z} < f^2(d)$.

لم۱-۳-۱۱: اگر یک نقطه ثابت $\tilde{z}$ از $f\in C^0(I,I)$ و $c\in I$ و یک عدد صحیح $n\geq 2$ وجود داشته باشند به طوری که $f(c)<c<\bar{z}\leq f^n(c)$، آن گاه f نقطه تناوبی از همه دوره های تناوب دارد.

برهان: باتوجه به لم قبل یک نقطه ثابت $\tilde{z}$ از f و یک نقطه d وجود دارند به طوری که $f(d)<d<\tilde{z}<f^2(d)$. فرض می کنیم u یک نقطه در $(f(d),d)$ باشد به طوری که $\tilde{z}<f(u)<f(d)$ و فرض کنیم w یک نقطه در $(d,\tilde{z})$ باشد به طوری که $f(w)=u$. فرض کنیم $I_0=[u,d]$ و $I_1=[w,\tilde{z}]$. آن گاه $I_0\cap I_1=\varnothing$ و $f(I_0)\cap f(I_1)\supset I_0\cup I_1$. با در نظر گرفتن دور $I_0(I_1)^n I_0$ که $n\geq 0$، f نقاط تناوبی از همه دوره های تناوب دارد. $(I_1)^n$ نشان می دهد که تکرارهای I_1، n مرتبه است.

قضیه۱-۳-۱۲: (حالت خاص قضیه شارکوفسکی) فرض کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. همچنین f یک نقطه تناوبی از دوره تناوب اول ۳ داشته باشد، آن گاه به ازای هرعدد طبیعی n، f دارای یک نقطه تناوبی از دوره تناوب اول n است.

برهان:فرض کنید $a,b,c\in\mathbb{R}$ که $a<b<c$، $f(a)=b$، $f(b)=c$ و $f(c)=a$. (حالت دیگر، یعنی $f(a)=c$، $f(c)=b$ و $f(b)=a$ به طور مشابه اثبات می شود.) فرض می کنیم $I_0=[a,b]$ و $I_1=[b,c]$ پس $f(I_0)\supset I_1$ و $f(I_1)\supset I_1\cup I_0$ بنا به لم ۱-۳-۴، f یک نقطه ثابت در I_1 دارد. چون $f^2(I_0)\supset I_1\cup I_0$ پس f^2 یک نقطه ثابت در I_0 دارد. پس نقطه x_0 در I_0 وجود دارد به طوری که $f^2(x_0)=x_0$. توجه کنیم که x_0 دوره تناوب ۱ ندارد زیرا f بازه I_0 را به I_1 می برد. لذا f نقطه تناوبی از دوره تناوب اول ۲ دارد.



شکل ۱-۳ ساختار A_i ها

حال باید نقاط تناوبی از دوره تناوب اول $n>3$ را معرفی کنیم. به طور استقرایی بازه های $A_0,A_1,A_2,\ldots A_{n-2}$ را به ترتیب زیر پیدا می کنیم. $A_0=I_1$. چون $f(I_1)\supset I_1$ با توجه به

لم ۱-۳-۵ زیر بازه $A_1 \subset A_0 = I_1$ وجود دارد به طوری که $f(A_1) = A_0$ و زیر بازه $A_2 \subset A_1$ وجود دارد به طوری که $f(A_2) = A_1$ و بنابراین $f^2(A_2) = A_0 = I_1$. همچنین زیر بازه $A_3 \subset A_2$ وجود دارد به طوری که $f(A_3) = A_2$ و $f^2(A_3) = f(A_2) = A_1$ و در نتیجه $f^3(A_3) = A_0$. با ادامه این روند زیربازه $A_{n-2} \subset A_{n-3}$ وجود دارد به طوری که $f(A_{n-2}) = A_{n-3}$. بنابراین زنجیر $A_{n-2} \to A_{n-3} \to \cdots \to A_1 \to A_0$ را به دست آورده ایم. طبق لم ۱-۳-۸ ، $x \in A_{n-2}$ ی وجود دارد به طوری که $\{f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^{n-2}(x)\} \subset A_0$. در واقع $f^{n-2}(A_{n-2}) = A_0 = I_1$. چون $f(I_1) \supset I_0$، زیر بازه $A_{n-1} \subset A_{n-2}$ وجود دارد به طوری که $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$. سرانجام چون $f(I_0) \supset I_1$ پس $f^n(A_{n-1}) \supset I_1$ به طوری که $f^n(A_{n-1})$، A_{n-1} را می پوشاند. شکل ۱-۳ را ببینید. با توجه به لم ۱-۳-۴، f^n دارای یک نقطه ثابت p در A_{n-1} است. بنابراین f یک نقطه تناوبی از دوره تناوب n در A_{n-1} دارد.

ادعا می کنیم که n دوره تناوب اول نقطه p است. در واقع $n-2$ تکرار اول نقطه p در I_1 قرار دارد. تکرار $n-1$ام در I_0 قرار دارد و تکرار nام نقطه p است. اگر $f^{n-1}(p)$ نقطه درونی I_0 باشد واضح است که n دوره تناوب اول نقطه p است. اگر $f^{n-1}(p)$ یکی از نقاط مرزی a یا b باشد، آن گاه $n = 2$ یا $n = 3$، زیرا

$$f^{n-1}(p) = b \to f^n(p) = c \to p = c \quad \text{و} \quad f^{n-1}(p) = a \to f^n(p) = b \to p = b$$

درنتیجه

$$c \notin A_1 \to n-2 = 0 \to n = 2 \quad \text{و} \quad b \notin A_2 \to n-2 = 1 \to n = 3$$

به ترتیب زیر از اعدادطبیعی که توسط شارکوفسکی ارائه شده است، ترتیب شارکوفسکی[1] می گویند.

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \ldots \rhd 2\times 3 \rhd 2\times 5 \rhd 2\times 7 \rhd \ldots \rhd 2^2\times 3 \rhd 2^2\times 5 \rhd 2^2\times 7 \rhd \ldots$$
$$\ldots \rhd 2^n\times 3 \rhd 2^n\times 5 \rhd 2^n\times 7 \rhd \ldots \rhd 2^n \rhd 2^{n-1} \rhd \ldots 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2^1 \rhd 1$$

تعریف ۱-۳-۱۳: اگر f دارای نقطه تناوبی ازدوره تناوب اول n باشدونقطه تناوبی ازدوره تناوب اول m که $m \rhd n$ نداشته باشد در این صورت می گوئیم n در ترتیب شارکوفسکی ماکزیمال است.

تعریف ۱-۳-۱۴: فرض کنیم P یک مدار تناوبی f از دوره تناوب اول n باشد که $n \geq 3$ و فرد باشد. نقطه $a \in P$ وجود دارد به طوری که یا

$$f^{n-1}(a) < f^{n-3}(a) < \cdots < f^2(a) < a < f(a) < f^3(a) < \cdots < f^{n-2}(a)$$

یا

$$f^{n-1}(a) > f^{n-3}(a) > \cdots > f^2(a) > a > f(a) > f^3(a) > \cdots > f^{n-2}(a)$$

در این صورت می گوئیم P یک دور استفان[2] از دوره تناوب اول n است.

---

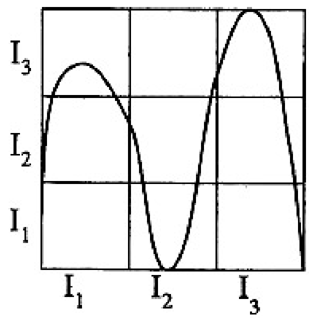
[1]- Sharkovskii ordering

[2]- Stefan cycle

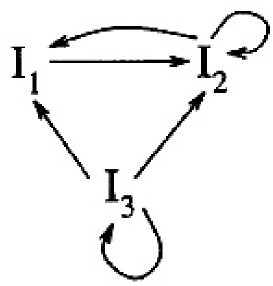
تعریف۱-۳-۱۵: مجموعه $A=\{I_k\}$ ، که I_k ها تعداد متناهی زیر بازه های بسته بازه I هستند، یک افراز است، اگر نقاط درونی بازه های I_k ناتهی و دوبدو مجزا باشند. فرض کنیم $A=\{I_k\}$ یک افراز باشد. نمودار مارکوف[1] $f:I\to I$ یا A-گراف f نسبت داده شده به این افراز نموداری است که رئوس آن بازه های I_k و یال های آن زوج (I_i,I_j) هستند به طوری که $f(I_i)\supset I_j$. این یال ها را به صورت $I_i\to I_j$ نمایش می دهیم.

با توجه به لم ۱-۳-۸ ، اگر $I_{i_0}\to I_{i_1}\to I_{i_2}\to\dots\to I_{i_{n-1}}\to I_{i_0}$ یک زنجیر در نمودار مارکوف یک افراز باشد، آن گاه یک نقطه $x_0\in I_{i_0}$ وجود دارد به طوری که $f^j(x_0)\in I_{i_j}$ و $f^n(x_0)=x_0$.

مثال۱-۳-۱۶: فرض کنیم نمودار f به صورت رسم شده در شکل۱-۴ با سه بازه I_1 و I_2 و I_3 باشد. پس $f(I_1)\supset I_2$ و $f(I_2)\supset I_1,I_2$ و $f(I_3)\supset I_1$. بنابراین نمودار مارکوف یا A-گراف این سه بازه به صورت رسم شده در شکل ۱-۵ است.



شکل ۱-۴ نمودار تابع مثال ۱-۳-۶

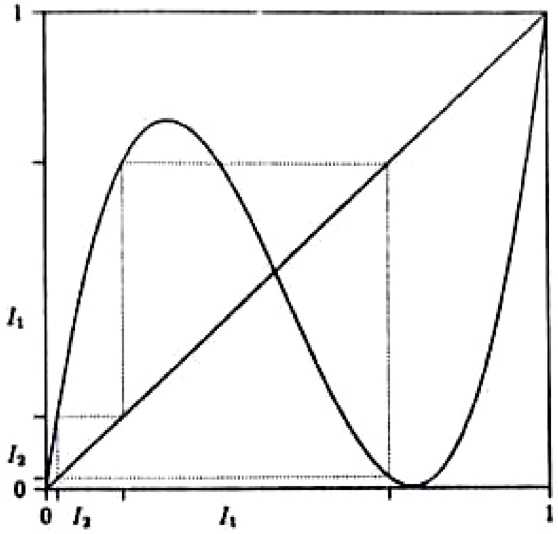


شکل ۱-۵ A-گراف افراز در مثال ۱-۳-۶

مثال۱-۳-۱۷ : فرض کنیم $0<p_1<p_2<p_3<1$ و $f:[0,1]\to[0,1]$ یک نگاشت پیوسته باشد به طوری که $f(p_1)=p_2, f(p_2)=p_3, f(p_3)=p_1$. در حقیقت کافیست که نقاط (p_1,p_2) و (p_2,p_3) و (p_3,p_1) را به صورت یک منحنی در مربع $[0,1]\times[0,1]$ که هر خط عمودی را قطع میکند به هم وصل کنیم، شکل ۱-۶ را ببینید. این منحنی نمودار تابع f است.

افراز $I_1=[p_2,p_3]$ و $I_2=[p_1,p_2]$ را در نظر می گیریم. چون $f(I_1)\supset I_1\cup I_2$ و $f(I_2)\supset I_1$ نمودار مارکوف این افراز یک زیر نمودار با دو راس ودو یال دارد که یک یال آن I_1 را به خودش و یک یال آن I_1 را به I_2 وصل می کند. دقت کنید که نمودار مارکوف این افراز می تواند شامل یال دیگری نیز باشد اگر $f(I_2)\supset I_2$.

[1] -Markov graph



شکل ۱–۶ یک نگاشت $f:[0,1]\to[0,1]$
یک نقطه تناوبی از دور تناوب ۳ دارد

شکل ۱–۷ نمودار مارکوف نسبت داده
شده به یک نقطه تناوبی ازدوره تناوب ۳

فرض کنیم $I_1 \to I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1 \to I_2 \to I_1$ یک زنجیر با تعداد یال های $m > 3$ باشد. با توجه به لم ۱–۳–۸ داریم $\exists x_0 \in I_1; f^m(x_0) = x_0$. واضح است که $f^i(x_0) \in I_1$ برای هر $0 \le i < m-1$، و $f^{m-1}(x_0) \in I_2$. ادعا می کنیم که x_0 یک نقطه تناوبی ازدوره تناوب m است. درحقیقت ادعا می کنیم که عدد صحیح i که $0 < i < m$ با شرط $f^i(x_0) = x_0$ وجود ندارد. زیرا اگر $f^i(x_0) = x_0$ با شرط $0 < i < m$، و با توجه به $f^m(x_0) = x_0$، آن گاه $f^{m-1}(x_0) = f^{i-1}(x_0) \in I_1$. بنابراین $f^{m-1}(x_0) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$.

در نتیجه $x_0 = f(f^{m-1}(x_0)) = f(p_2) = p_3$ که غیر ممکن است. زیرا $f(p_3) = p_1 \notin I_1$. بنابراین f نقطه تناوبی از هر دوره تناوب بزرگتر از ۳ دارد. با در نظر گرفتن زنجیر $I_2 \to I_1 \to I_2$ یک نقطه تناوبی از هر دوره تناوب ۲ مشخص می شود.

توجه کنید که با استدلال مشابه می توان ثابت کرد که یک نگاشت پیوسته $f:[0,1]\to[0,1]$ به طوری که $f(p_1) = p_2, f(p_2) = p_3, f(p_3) = p_1$، نقاط تناوبی از همه دوره های تناوب دارد. بنابر این استدلال بالا اثبات دیگری برای حالت خاص قضیه شارکوفسکی ارائه می دهد. [۱۹]

۱-۴ اثباتی از قضیه شارکوفسکی با استفاده از دور استفان

قضیه شارکوفسکی ۱-۴-۱: فرض کنیم $f: I \to I$ یک نگاشت پیوسته باشد. اگر f یک نقطه تناوبی از دوره تناوب اول n داشته باشد و $n \rhd k$، آن گاه f یک نقطه تناوبی از دوره تناوب اول k دارد.

یادآوری: ابتدا حالتی که n یک عدد صحیح فرد است، را درنظر می گیریم که (i) $n > 1$ و (ii) f نقطه تناوبی x از دوره تناوب n دارد، اما نقطه تناوبی از دوره تناوب فرد k که $1 < k < n$، (یعنی $k \rhd n$) ندارد. برای اثبات قضیه شارکوفسکی در این حالت، پتر استفان وجود یک مدار با یک الگوی خاص روی خط اعداد حقیقی را اثبات کرد.

فرض کنیم x_1 یک نقطه تناوبی از دوره تناوب اول n باشد، به طوری که

$$x_n < x_{n-2} < \cdots < x_3 < x_1 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{n-1}$$

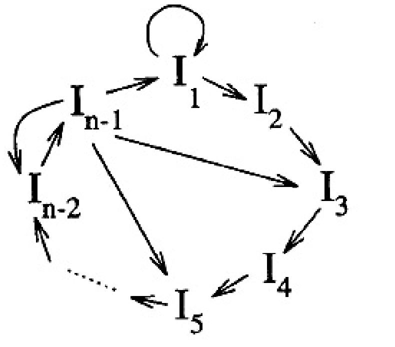
که $x_j = f^{j-1}(x_1)$. لم ۱-۴-۲ ثابت می کند که چنین مداری وجود دارد. فرض کنیم $I_1 = [x_1, x_2]$ ، $I_2 = [x_3, x_1]$، $I_3 = [x_2, x_4]$ ، $I_{2j} = [x_{2j+1}, x_{2j-1}]$، $I_{2j-1} = [x_{2j-2}, x_{2j}]$ برای $j = 2, 4, \dots, (n-1)/2$. واضح است که:

(i) $f(I_1)$، I_1 و I_2 را می پوشاند.

(ii) $f(I_j)$، I_{j+1} را می پوشاندکه $2 \le j \le n-2$.

(iii) $f(I_{n-1})$ همه I_j ها را که j فرد است، می پوشاند.

بنابراین وجود چنین مداری ثابت می کند که A-گراف f شامل یک زیرگراف به صورت نمایش داده شده درشکل ۱-۸ است. این زیر گراف، گراف استفان[1] نامیده می شود.



شکل ۱-۸ زیرنمودار افراز در لم ۱-۴-۲

با بکار بردن لم های زیر برای گراف استفان، وجود نقاط تناوبی از همه دوره های تناوب k اثبات می شود. اکنون لم ها را بیان و آن ها را اثبات می کنیم.

۱-Stefan graph

لم ۱-۴-۲: فرض کنیم $n>1$ یک عدد صحیح فرد است و x یک نقطه تناوبی از دوره تناوب اول n باشد و f نقطه تناوبی از دوره تناوب فرد k که $1<k<n$ نداشته باشد. به عبارت دیگر در ترتیب شارکوفسکی $k \rhd n$ باشد و $J=[\min O(x),\max O(x)]$. همچنین فرض می کنیم A یک افراز از J باشدکه اعضای آن، نقاط مدار x باشند.در این صورت A-گراف f شامل یک زیرگراف به شکل زیر می باشد.

همه بازه هایی که نقاط درونی آن ها مجزا هستند، را می توان به صورت $I_1,I_2,\ldots,I_{n-1}$ نام گذاری کرد به طوری که (i) $f(I_1)$، I_1 و I_2 را می پوشاند. (ii) $f(I_j)$، I_{j+1} را می پوشاند که $2\le j\le n-2$. (iii) $f(I_{n-1})$ همه I_j ها که j فرد است را می پوشاند.

برهان: فرض کنیم $O(x)=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$ که z_j به صورت $z_1<z_2<\cdots<z_n$ روی محور اعداد حقیقی مرتب شده اند. پس $f(z_n)<z_n$. زیرا $f(z_n)$ یکی از z_j که $n\neq j$. به طور مشابه $f(z_1)>z_1$. فرض می کنیم $a=\max\{y\in O(x);f(y)>y\}$، پس $a\neq z_n$. فرض کنیم b عدد بزرگتر بعد از a در مدار مرتب شده x روی محور اعداد حقیقی باشد. همچنین فرض می کنیم $I_1=[a,b]$. نشان می دهیم I_1 همان بازه مطرح شده در لم است. دنباله ای ازمراحل کوتاه وجود دارد که به عنوان ادعا مطرح می کنیم. ابتدا باید نشان دهیم که $f(I_1)$، خود I_1 را می پوشاند. (ادعای۱) و در نهایت تمام J را می پوشاند. (ادعای۲) ادعای ۴ نشان می دهد که کوتاهترین زنجیر با بازه های مجزا $I_1\to I_2\to\ldots\to I_{n-1}\to I_1$ وجود دارد. ادعای ۵ و ۶ نشان می دهند که این بازه ها همان گونه که در لم ادعا شده، رفتار می کنند.

ادعای۱: تصویر I_1 خود I_1 را می پوشاند. یعنی $f(I_1)\supset I_1$.

برهان: با توجه به تعریف a، $f(a)>a$، پس $f(a)\ge b$. چون $a=\max\{y\in O(x);f(y)>y\}$ و $b>a$، پس $f(b)<b$. بنابراین $f(b)\le a$. درنتیجه $f(I_1)\supset I_1$.

ادعای۲: تصویر $(n-2)$ ام I_1، بازه J را می پوشاند. یعنی $f^{n-2}(I_1)\supset J$.

برهان: چون $f(I_1)\supset I_1$، پس $f^{k+1}(I_1)\supset f^k(I_1)$. بنابراین تکرارها تو در تو هستند. تعداد نقاط در $O(x)\setminus\{a,b\}$، $n-2$ است. پس $z_n\in f^k(I_1)$، برای یک $o\le k\le n-2$. با توجه به خاصیت تو در تو بودن، $z_n\in f^{n-2}(I_1)$. به طور مشابه $z_1\in f^{n-2}(I_1)$.چون I_1 یک بازه بسته است، داریم:

$$f^{n-2}(I_1)\supset[z_1,z_n]=J$$

ادعای۳: یک $k_o\in A$ ی با شرط $k_o\neq I_1$ وجود دارد به طوری که $f(k_o)\supset I_1$.

برهان: چون n فرد است، پس اعضای بیشتری از $O(x)$ یک طرف I_1 قرارمی گیرند. این اعضاء را با ρ نشان می دهیم. نقاط y_1 و y_2 وجود دارند به طوری که $f(y_1)\in O(x)$ و $f(y_2)\in O(x)\setminus\rho$.