دانشگاه کاشان

دانشکده‌ی علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد

در رشته‌ی ریاضی – جبر

عنوان:

ماتریس‌های انتقالی روی مشبکه‌های توزیع‌پذیر

استاد راهنما:

دکتر بهنام بازیگران

استاد مشاور:

پروفسور سیدعلی‌رضا اشرفی

به وسیله‌ی:

ابوالفضل خانی بیدگلی

اسفند ۱۳۸۸

تقدیم به:

همسرم، آن که آفتاب مهرش در

آستانه‌ی قلبم همچنان پا برجا است و

هرگز غروب نخواهد کرد.

تقدیر و سپاس

خدای را سپاسگزارم که به من توفیق گام نهادن در مسیر مقدس علم و پژوهش را عطا فرمود. برخود لازم می‌دانم از محضر بزرگوارانی که با کمک و توجهشان، موفقیت بنده را تضمین نمودند، نهایت تشکر را داشته باشم.

از زحمات استاد عزیزم جناب آقای **دکتر بهنام بازیگران** که با راهنمایی ها و دلسوزی‌هایش، پژوهش بنده را پربار نمودند، تشکر می‌کنم.

از جناب آقای **پروفسور علی‌رضا اشرفی** که به عنوان مشاور نقش سازنده‌ای ایفا نمودند، قدردانی می‌کنم.

از آقای **دکتر جهانی‌نژاد** به عنوان استاد داخل دانشگاه و آقای **دکتر خورشیدی** به عنوان استاد داور مدعو خارج از دانشگاه که این پایان‌نامه را مطالعه فرمودند و در جلسه‌ی دفاعیه شرکت کردند، کمال تشکر را دارم.

از حضور آقای **دکتر حسن دقیق** به عنوان نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی نیز تشکر می‌نمایم. همچنین از زحمات سرکار خانم صفیه خسروحیدری در تدوین این پایان‌نامه، سپاسگزارم.

در پایان، از همسر عزیزم، که حمایت‌های بی‌دریغش در این راه پر نشیب، طی مسیر را برایم آسان‌تر نمود، صمیمانه تشکر می‌کنم.

چکیده

مشبکه‌های توزیع‌پذیر نوع خاصی از مشبکه‌ها می‌باشند. هر ماتریس مربعی را که درایه‌های آن عناصری از یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر کران‌دار باشد، ماتریس مشبکه می‌نامیم.

فرض کنید A یک ماتریس مشبکه از مرتبه n باشد. اگر $A^۲ \leq A$، آن‌گاه A، ماتریس انتقالی نامیده می‌شود. همچنین، اگر ماتریس جایگشتی P (از مرتبه n) وجود داشته باشد به طوری که در ماتریس $F = PAP^T = (f_{ij})$ به ازای هر $i \geq j$؛ $f_{ij} \not< f_{ji}$، آن‌گاه F یک «فرم کانونی» ماتریس A نامیده می‌شود.

ماتریس‌های انتقالی نوع مهمی از ماتریس مشبکه‌ها می‌باشند که مطالعه و تحلیل آن‌ها موضوع این پایان‌نامه است. بنابراین به ترتیب مباحث بستار انتقالی، توان انتقالی و توان همگرایی یک ماتریس مشبکه‌ی انتقالی مطرح خواهد شد. همچنین مسائل فرم کانونی ماتریس مشبکه‌های انتقالی بررسی خواهد شد.

کلمات کلیدی: ماتریس مشبکه، ماتریس انتقالی، بستار انتقالی، توان، همگرایی، فرم کانونی

فهرست مطالب

فهرست علائم و اختصارات

علامت	معنی
$a\\|b$	دو عنصر a,b مقایسه ناپذیرند.
$\omega(P)$	عرض مجموعه‌ی مرتب جزئی P
$D(n)$	مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد طبیعی n
$\mid$	عادکردن
$\inf S$	بزرگترین کران پایین مجموعه‌ی S
$\sup S$	کوچکترین کران بالای مجموعه‌ی S
$a \wedge b$	$\inf\{a,b\}$
$a \vee b$	$\sup\{a,b\}$
$x \prec y$	عنصر y، پوشش عنصر x است.
$D.C.C$	شرط زنجیر کاهشی
$[a,b]$	کوچکترین مضرب مشترک اعداد a و b
(a,b)	بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد a و b
$P(X)$	مجموعه‌ی توانی مجموعه‌ی X
a'	متمم عنصر a
$L(X)$	زیرمشبکه‌ی تولید شده به وسیله‌ی مجموعه X از مشبکه‌ی L
$A(L)$	مجموعه‌ی اتم‌های مشبکه‌ی L
$J(L)$	مجموعه‌ی همه‌ی عناصر $\vee-$ تحویل ناپذیر مشبکه‌ی L
$a-b$	عنصر شبه مکمل پایین نسبی b به a
$d^{+}(v)$	درجه‌ی خروجی رأس v
$d^{-}(v)$	درجه‌ی ورودی رأس v
$M_n(L)$	مجموعه‌ی تمام ماتریس مشبکه‌های مشبکه‌ی L از مرتبه n

E_{ij}	ماتریسی که همه‌ی درایه‌های آن صفرند، به جز درایه‌ی (ij)ام آن که یک می‌باشد
J_n	ماتریس مربعی از مرتبه n که همه‌ی درایه‌های آن یک می‌باشد.
A^T	ترانهاده‌ی ماتریس مشبکه‌ی A
∇A	$\nabla A := A \wedge A^T$
I_n	ماتریس همانی از مرتبه n
$a_{ij}^{(l)}$	درایه‌ی (ij)ام ماتریس مشبکه‌ی A^l $(l \in \mathbb{N})$
$\triangle A$	$\triangle A := A - A^T$
$D(A)$	گراف جهت‌دار وابسته به ماتریس مشبکه‌ی A
$a_{(l)}$	مؤلفه‌ی lام عنصر a
$A_{(l)}$	مؤلفه‌ی l ام ماتریس مشبکه‌ی A
B_k	مشبکه‌ی بولی متناهی با k اتم
$B(A)$	مشبکه‌ی بولی وابسته به ماتریس مشبکه‌ی A
χ_A	تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی A
A^+	بستار انتقالی ماتریس مشبکه‌ی A
$k(A)$	شاخص ماتریس مشبکه‌ی A
$k(A)$	شاخص همگرایی ماتریس مشبکه‌ی A
$d(A)$	دوره‌ی تناوب ماتریس مشبکه A
$[a]$	کلاس عدد a
$G(A)$	گروه $\{A^k, A^{k+1}, \ldots, A^{k+d-1}\}$ همراه با عمل ضرب ماتریس مشبکه
$[n]$	کوچکترین مضرب مشترک اعداد ۱ تا n
$t(A)$	توان انتقالی ماتریس مشبکه‌ی A
$r = r(A)$	– کوچکترین عدد صحیح مثبتی که ماتریس مشبکه‌ی A^r،خودتوان می‌شود. – عدد صحیح مثبت یکتایی که ماتریس مشبکه‌ی A^r، عنصر همانی (خودتوان) گروه $G(A)$ می‌شود.
$\|G(A)\|$	مرتبه‌ی گروه $G(A)$

مقدمه

موضوع ماتریس مشبکه‌ها کاربردهای روز افزون در نظریه‌ی سوئیچینگ، ماشین‌های خودکار و نظریه‌ی گراف‌های متناهی پیدا نموده است. مسأله توان این ماتریس‌ها، اولین بار در سال ۱۹۶۴ در مقالات گیواُن[1] مطرح شد و از سال ۱۹۸۰ چندین محقق، در مورد ماتریس مشبکه‌های انتقالی روی انواع خاصی از مشبکه‌ها به نام مشبکه‌های توزیع‌پذیر، مطالعاتی را شروع نمودند. در سال ۱۹۸۲، کیم[2] مفهوم ماتریس‌های بولی دوتایی انتقالی را مطرح نمود، در سال ۱۹۸۳، هاشیموتو[3] مفهوم ماتریس فازی انتقالی و توان همگرایی آن را بیان نمود.

مسأله فرم کانونی یک ماتریس انتقالی اول به‌وسیله کیم و روش [4] در سال ۱۹۸۰ مطرح گردید؛ آن‌ها مسأله‌ی فرم کانونی را برای ماتریس‌های فازی خودتوان مطرح کردند و حل آن را در سال ۱۹۸۱ ارائه نمودند. همچنین در سال ۱۹۸۳ هاشیموتو مسأله‌ی فرم کانونی ماتریس‌های فازی انتقالی را بیان و اثبات نمود. اما آن‌چه در مورد ماتریس‌های انتقالی در بالا از جمله توان همگرایی و فرم کانونی بیان نمودیم همگی مربوط به جبر بول دوتایی $\{0,1\}$ و جبر فازی $[0,1]$ است. این ساختارها در واقع مشبکه‌هایی خطی هستند. در رساله‌ی حاضر قصد داریم مسائل توان ماتریس‌های انتقالی و توان

[1] *Give on*

[2] *Kim*

[3] *Hashimoto*

[4] *Rosh*

همگرایی آن‌ها، همچنین مسائل فرم کانونی را در مورد دسته‌ای کلی‌تر از مشبکه‌ها به نام مشبکه‌های توزیع‌پذیر مورد بحث قرار دهیم.

فصل اول این پایان‌نامه را به بیان مفاهیم اساسی و موردنیاز در زمینه مشبکه‌ها، گراف‌های جهت‌دار، ماتریس مشبکه و ماتریس فازی اختصاص داده‌ایم. در فصل دوم به بیان خواص توان‌های یک ماتریس مشبکه تحت دو عنوان بستار انتقالی و توان انتقالی اکتفا نموده‌ایم و در فصل سوم توان همگرایی ماتریس مشبکه‌های انتقالی و مسائل فرم کانونی این نوع ماتریس‌ها را تحلیل می‌نمائیم.

منبع اصلی پایان‌نامه حاضر، منبع [۲۱] می‌باشد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱-۱ نظریه‌ی مشبکه‌ها

قصد ما در این بخش، بیان مفاهیمی از نظریه‌ی مشبکه‌ها مانند مشبکه‌های توزیع‌پذیر، مشبکه‌های بولی و مشبکه‌های براورین دوگان[1] است که در ادامه‌ی پایان‌نامه کاربرد دارند. به علاوه این بخش در راستای اثبات دو گزاره‌ی زیر تنظیم گردیده است:

۱. زیرمشبکه‌ی تولید شده توسط تعداد متناهی از عناصر یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر، متناهی است.

۲. هر مشبکه‌ی توزیع‌پذیر متناهی با یک مشبکه‌ی بولی متناهی، تکریخت است.

مطالب این بخش از منابع [۱]، [۲]، [۳]، [۵]، [۷]، [۱۵] و [۱۹] می‌باشد.

تعریف ۱-۱.۱ رابطه $\leq$ روی مجموعه‌ی غیرتهی P را یک «ترتیب جزئی» گوئیم هرگاه به ازای هر $a, b, c \in P$ داشته باشیم:

الف) خاصیت بازتابی: $a \leq a$

[1] *dually Brouwerian Lattice*

ب) خاصیت پادتقارنی: اگر $a \leq b$ و $b \leq a$، آن‌گاه $a = b$.

ج) خاصیت تعدی: اگر $a \leq b$ و $b \leq c$، آن‌گاه $a \leq c$.

مجموعه P همراه با رابطه‌ی ترتیب جزئی $\leq$ یک «مجموعه‌ی مرتب جزئی» نامیده می‌شود. همچنین $a < b$ را به معنی $a \leq b$ و $a \neq b$ به‌کار خواهیم برد.

تعریف ۱-۱.۲ در مجموعه‌ی مرتب جزئی P، دو عنصر b, a «مقایسه‌پذیر» نامیده می‌شود هرگاه $a \leq b$ یا $b \leq a$، در غیر این صورت، «مقایسه‌ناپذیر» نامیده می‌شود و با نماد $a \parallel b$ نشان داده می‌شود. همچنین یک مجموعه‌ی مرتب جزئی که هر دو عنصر آن قابل مقایسه باشد، «مجموعه‌ی مرتب خطی یا زنجیر» نامیده می‌شود و یک مجموعه‌ی مرتب جزئی را «نامرتب» گوئیم هرگاه به ازای هر $a \neq b$؛ $a \parallel b$.

تعریف ۱-۱.۳ فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی و زیرمجموعه‌ای غیرتهی از P باشد. اگر به ازای هر $a, b \in Q$، رابطه ترتیب جزئی $\leq_Q$ روی Q را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$a \leq_Q b \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad a \leq b$$

آن‌گاه $(Q, \leq_Q)$ «زیرمجموعه‌ی مرتب جزئی» از $(P, \leq)$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱.۴ یک «زنجیر C» در یک مجموعه‌ی مرتب جزئی P، زیرمجموعه‌ای غیرتهی است که به عنوان زیرمجموعه‌ی مرتب جزئی از P، یک زنجیر باشد.

تعریف ۱-۱.۵ یک «پاد زنجیر C» در یک مجموعه‌ی مرتب جزئی P، زیرمجموعه‌ای غیرتهی است که به عنوان زیرمجموعه‌ی مرتب جزئی از P، نامرتب باشد.

تعریف ۱-۱.۶ «عرض مجموعه‌ی مرتب جزئی P» که با نماد $\omega(P)$ نشان می‌دهیم برابر عدد طبیعی n است اگر یک پاد زنجیر از n عنصر در P وجود داشته باشد به‌طوری‌که تعداد عناصر همه پاد زنجیرهای دیگر آن، کوچکتر یا مساوی n باشد.

مثال ۱-۱.۷ مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد طبیعی n، $D(n) := \{d \in \mathbb{N} : d|n\}$، را در نظر بگیرید. به وضوح $(D(n), |)$ یک مجموعه مرتب جزئی است. فرض کنید $n = ۱۲$ لذا $D(۱۲) = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\}$. ملاحظه می‌شود دو عنصر ۴ و ۲ مقایسه پذیرند اما دو عنصر ۳ و ۲ مقایسه ناپذیرند. یک زنجیر در این مجموعه برابر $\{۱, ۳, ۶, ۱۲\}$ می‌باشد و عرض این مجموعه، برابر ۲ است.

تعریف ۱-۱.۸ فرض کنید P یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد، دراین‌صورت

الف) $a \in P$ را عنصر «ماکزیمال» P گویند اگر $x \in P$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $a < x$.

ب) $a \in P$ را عنصر «ماکزیمم» P گویند اگر برای هر $x \in P$، $x \leq a$.

تذکر ۱-۱.۹ الف) یک مجموعه‌ی مرتب جزئی، ممکن است عنصر ماکزیمال نداشته باشد مانند مجموعه‌ی مرتب جزئی اعداد طبیعی با رابطه «کوچکتر یا مساوی».

ب) یک مجموعه‌ی مرتب جزئی، ممکن است بیش از یک عنصر ماکزیمال داشته باشد مانند مجموعه‌ی $\{۲, ۳, ۴, ۶\}$ تحت رابطه «عاد کردن» که در آن ۶ و ۴ دو عنصر ماکزیمال هستند.

ج) عنصر ماکزیمم یک مجموعه‌ی مرتب جزئی P، عنصری است که با همه‌ی عناصر P، قابل مقایسه است اما عنصر ماکزیمال P، لازم نیست چنین خاصیتی داشته باشد.

د) عنصر ماکزیمم در یک مجموعه‌ی مرتب جزئی، ممکن است وجود نداشته باشد اما در صورت وجود، منحصربه‌فرد است و آن را با ۱ نمایش می‌دهیم.

ه) عنصر ماکزیمم در صورت وجود، تنها عنصر ماکزیمال مجموعه‌ی مرتب جزئی P است زیرا فرض کنید a عنصر ماکزیمم P باشد پس به ازای هر $x \in P$؛

$$x \leq a \qquad (۱-۱)$$

اگر a عنصر ماکزیمال نباشد، آن‌گاه $y \in P$ وجوددارد به‌طوری‌که $a < y$ لذا $a \leq y$ و $a \neq y$. پس طبق نامساوی $(۱-۱)$، $y \leq a$ و این تناقض است. بنابراین a عنصر ماکزیمال است. حال فرض

کنید b عنصر ماکزیمال دیگر P باشد چون a عنصر ماکزیمم است پس $b \leq a$ اما $b \neq a$، لذا $b < a$ که با ماکزیمال بودن b در تناقض است.

فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد، رابطه‌ی $\geq$ را چنین تعریف می‌کنیم که $a \geq b$ اگر و فقط اگر $b \leq a$. رابطه $\geq$ در شرایط الف، ب و ج تعریف مجموعه‌ی مرتب جزئی، صدق می‌کند بنابراین $(P, \geq)$ نیز یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است. این مجموعه‌ی مرتب جزئی را دوگان $(P, \leq)$ می‌نامیم. حال اگر Q یک گزاره در مورد مجموعه‌های مرتب جزئی باشد و اگر در گزاره Q تمام روابط $\leq$ با $\geq$ جایگزین شود، آن‌گاه دوگان Q را خواهیم داشت. حال آماده هستیم «اصل دوگان» در مجموعه‌های مرتب جزئی را بیان نمائیم:

اصل دوگان: اگر گزاره Q برای همه مجموعه‌های مرتب جزئی درست باشد، آن‌گاه دوگان آن نیز، برای همه مجموعه‌های مرتب جزئی درست است.

تعریف عنصر مینیمال و عنصر مینیمم به طور دوگان از تعریف (۱ − ۸.۱) به‌دست می‌آید. در ضمن تذکر (۱ − ۹.۱) نیز به‌طور دوگان در مورد این عناصر، صادق است و فقط یادآوری می‌نمائیم عنصر مینیمم P در صورت وجود، منحصربه‌فرد است و با نماد ۰ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱.۱۰ فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد، در این صورت P را «کران‌دار» گوئیم هرگاه به ازای هر $x \in P$؛ $0 \leq x \leq 1$ که ۰ و ۱ به ترتیب عناصر مینیمم و ماکزیمم P هستند.

تعریف ۱-۱.۱۱ فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی و S زیرمجموعه‌ای از آن باشد. در این صورت عنصر $c \in P$ یک «کران بالای» مجموعه S نامیده می‌شود هرگاه‌به ازای هر $x \in S$ داشته باشیم $x \leq c$. این عنصر «کوچکترین کران بالا» یا سوپریمم S $(\sup S)$ نامیده

می‌شود هرگاه، شرط زیر، نیز برقرار باشد:

اگر $d \in P$ یک کران بالای مجموعه S باشد، آن‌گاه $c \leq d$.

تذکر ۱-۱.۱۲ در مجموعه‌ی مرتب جزئی $(P, \leq)$ یک زیرمجموعه S از P ممکن است دارای کران بالا یا سوپریمم نباشد یا ممکن است بیش از یک کران بالا داشته باشد، اما اگر S دارای سوپریمم باشد، آن‌گاه این سوپریمم، یکتا است.

با دوگان کردن تعریف اخیر، مفاهیم «کران پایین S» و «بزرگترین کران پایین S» یا اینفیموم S ($\inf S$) به دست می‌آید، همچنین دوگان تذکر اخیر در مورد این مفاهیم نیز صادق است.

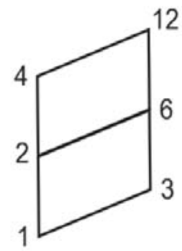
مثال ۱-۱.۱۳ مجموعه $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < ۰\}$ را با رابطه‌ی ترتیب جزئی معمولی $\leq$ در نظر بگیرید. به وضوح سوپریمم S برابر ۰ است و اینفیموم موجود نمی‌باشد.

نمادگذاری: اگر $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد و $S = \{a, b\} \subseteq P$، آن‌گاه $\inf\{a, b\}$ را (در صورت وجود) با $a \wedge b$ و $\sup\{a, b\}$ را (در صورت وجود) با $a \vee b$ نشان خواهیم داد.

تعریف ۱-۱.۱۴ اگر P مجموعه‌ی مرتب جزئی و $x, y \in P$ باشند. آن‌گاه «y پوشش x» است؛ هرگاه $x < y$ و اگر $x \leq z < y$، آن‌گاه $z = x$. در این صورت می‌گوئیم x به‌وسیله y، پوشانده می‌شود وآن را با نماد $x \prec y$ نمایش می‌دهیم.

تذکر ۱-۱.۱۵ یک وسیله‌ی مفید در مطالعه‌ی مجموعه‌های مرتب جزئی متناهی (یا نامتناهی منظم)، نمودار هاسه‌ی این مجموعه‌ها است: فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد، به هر عنصر P یک نقطه در صفحه متناظر می‌کنیم، دو عنصر x, y در P را به وسیله یک پاره‌خط به هم وصل می‌نمائیم اگر و فقط اگر به‌وسیله یکدیگر پوشانده شوند. اگر $x \prec y$، آن‌گاه نقطه متناظر با x در صفحه پایین‌تر از نقطه متناظر با y در صفحه است. نمودار حاصل، نمودار «هاسه‌ی مجموعه‌ی مرتب جزئی P» نامیده می‌شود.

مثال ۱-۱.۱۶ نمودار هاسه‌ی مجموعه‌ی مرتب جزئی $(D(12),|)$ به شکل زیر است:



D(12)

تعریف ۱-۱.۱۷ فرض کنید P یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد، در این صورت P در شرط زنجیر کاهشی $(D.C.C)$ صدق می‌کند هرگاه به ازای هر دنباله $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots$ از عناصر P، $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_k = x_{k+1} = \ldots$.

گزاره ۱-۱.۱۸ مجموعه‌ی مرتب جزئی P در شرط $D.C.C$ صادق است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی Q از P، عنصر مینیمال داشته باشد.

اثبات. ثابت می‌کنیم P، زنجیر کاهشی نامتناهی دارد اگر و تنها اگر زیرمجموعه غیرتهی Q از P وجود داشته باشد به‌طوری‌که عضو مینیمال نداشته باشد. فرض کنید $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$ یک زنجیر کاهشی نامتناهی در P باشد به وضوح $Q = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ عضو مینیمال ندارد.

برعکس: فرض کنید $x_1 \in Q$ چون x_1 عنصر مینیمال در Q نیست $x_2 \in Q$ وجود دارد که $x_1 > x_2$ به همین ترتیب $x_3 \in Q$ وجود دارد که $x_2 > x_3$، با ادامه این روند، زنجیر کاهشی نامتناهی در P به‌دست می‌آید. □

حال از مفهوم مجموعه‌ی مرتب جزئی استفاده کرده و مشبکه را به صورت زیر تعریف می‌نمائیم:

تعریف ۱-۱.۱۹ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی $(L, \leq)$، «مشبکه» نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $a, b \in L$، $a \wedge b$ و $a \vee b$، موجود باشند.

مثال ۱-۱.۲۰ هر مجموعه‌ی مرتب خطی، مشبکه‌ای است که به ازای هر دو عنصر a, b در آن، $a \wedge b = \min\{a, b\}$ و $a \vee b = \max\{a, b\}$. این نوع مشبکه، «مشبکه‌ی خطی» نامیده می‌شود.

مثال ۱-۱.۲۱ مجموعه‌ی مرتب جزئی $(D(n), |)$ یک مشبکه است زیرا به ازای هر $a, b \in D(n)$، $a \vee b = [a, b]$ و $a \wedge b = (a, b)$ که در آن $[a, b]$ و (a, b) به ترتیب کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترک b, a است، عناصری از $D(n)$ هستند.

مثال ۱-۱.۲۲ فرض کنید R یک حلقه باشد و L را مجموعه همه ایده‌آل‌های (دو طرفه) R درنظر می‌گیریم. در این صورت $(L, \subseteq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است و نیز یک مشبکه است که به ازای هر $I, J \in L$، $I \wedge J = I \cap J$ و $I \vee J = I + J$.

تعریف دیگری نیز از مشبکه وجود دارد که در بیشتر مواقع، کاربرد دارد:

تعریف ۱-۱.۲۳ فرض کنید L مجموعه‌ای دلخواه باشد در این صورت سه‌تایی $(L, \wedge, \vee)$ که در آن $\wedge, \vee : L \times L \longrightarrow L$ دو تابع هستند را یک مشبکه گوئیم هرگاه خواص زیر برقرار باشند:

۱. (خاصیت خودتوانی): به ازای هر $a \in L$،

$$a \wedge a = a \quad , \quad a \vee a = a$$

۲. (خاصیت جابجایی): به ازای هر $a, b \in L$،

$$a \vee b = b \vee a \quad , \quad a \wedge b = b \wedge a$$

۳. (خاصیت شرکت‌پذیری): به ازای هر $a, b, c \in L$،

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \quad , \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

۴. (قانون جذب): به ازای هر $a, b \in L$،

$$a \vee (a \wedge b) = a \quad , \quad a \wedge (a \vee b) = a$$

مثال ۱-۱.۲۴ فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه باشد. در این صورت مجموعه‌ی توانی X، که با $P(X)$ نشان می‌دهیم همراه با رابطه شمول مجموعه‌ها، یک مجموعه مرتب جزئی است. به ازای هر $A, B \in P(X)$؛ روابط$A \wedge B = A \cap B$ و $A \vee B = A \cup B$ را تعریف می‌کنیم. به وضوح اعمال $\cup$ و $\cap$ در خواص چهارگانه تعریف اخیر، صدق می‌کنند بنابراین $(P(X), \cap, \cup)$ یک مشبکه است.

گزاره ۱-۱.۲۵ دو تعریف گفته شده برای مشبکه، معادلند.

اثبات. به صفحه ۶ مرجع [۷]، مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱-۱.۲۶ مشبکه‌ی L، «کامل» نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر زیرمجموعه H در L، $\wedge H$ و $\vee H$ موجود باشند.

تعریف ۱-۱.۲۷ مشبکه‌ی L مشبکه‌ی «کران‌دار» نامیده می‌شود هرگاه به‌عنوان مجموعه مرتب جزئی، کران‌دار باشد.

مثال ۱-۱.۲۸ هر مشبکه‌ی متناهی، کران‌دار است.

مثال ۱-۱.۲۹ مشبکه $(P(X), \cap, \cup)$، مشبکه‌ی کران‌دار است که $\emptyset = \circ$ و $X = ۱$.

گزاره ۱-۱.۳۰ در هر مشبکه $(L, \wedge, \vee)$ به ازای هر $a, b, c, d \in L$، هرگاه $a \leq b$ و $c \leq d$ آن‌گاه $a \wedge c \leq b \wedge d$ و $a \vee c \leq b \vee d$، به ویژه به ازای هر $x \in L$ داریم $a \wedge x \leq b \wedge x$ و $a \vee x \leq b \vee x$.

اثبات. چون $a \wedge c \leq a \leq b$ و $a \wedge c \leq c \leq d$ بنابراین $a \wedge c$ یک کران پایین $\{b, d\}$ است لذا $a \wedge c \leq b \wedge d$. همچنین چون $a \leq b$ و $x \leq x$ لذا $a \wedge x \leq b \wedge x$، اثبات برای سوپریمم به‌طور دوگان برقرار است. $\square$

تعریف ۱-۱.۳۱ فرض کنید L مشبکه کران‌دار باشد و $a \in L$. هرگاه عنصری مانند $x \in L$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a \wedge x = \circ$ و $a \vee x = ۱$، در این صورت x را «متمم» a می‌نامیم. به وضوح اگر x، متمم a باشد، آن‌گاه a نیز متمم x خواهد بود.

تعریف ۱-۱.۳۲ اگر هر عنصر مشبکه L، دارای متمم باشد آن‌گاه L «مشبکه‌ی متمم‌دار» نامیده می‌شود.

مثال ۱-۱.۳۳ مشبکه $(P(X), \cap, \cup)$ مشبکه‌ی متمم‌دار است و متمم هر عنصر A از آن $X \setminus A$ می‌باشد.

تعریف ۱-۱.۳۴ اگر L و K دو مشبکه باشند نگاشت $\theta : L \longrightarrow K$ را $\wedge-$ همریختی می‌گوئیم هرگاه به ازای هر $a, b \in L$،

$$\theta(a \wedge b) = \theta(a) \wedge \theta(b)$$

و آن را $\vee-$ همریختی می‌گوئیم هرگاه به ازای هر $a, b \in L$،

$$\theta(a \vee b) = \theta(a) \vee \theta(b)$$

اگر θ هم $\vee-$ همریختی و هم $\wedge-$ همریختی باشد، آن‌گاه θ را یک «همریختی» می‌نامیم و آن را تکریختی می‌نامیم هرگاه θ یک به یک باشد و می‌گوییم L را می‌توان در K نشاند هرگاه همریختی یک به یک $\theta : L \longrightarrow K$ موجود باشد. همچنین اگر θ پوشا باشد آن را برویختی می‌نامیم و اگر θ همریختی یک‌به یک و پوشا باشد θ یک یکریختی است و مشبکه L و K یکریختند و با نماد $L \cong K$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱-۱.۳۵ در هر مشبکه $(L, \leq \wedge, \vee)$ به ازای هر $a, b, c \in L$ داریم:

الف) $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

ب) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

اثبات. الف) چون $a \wedge b \leq a$ و $a \wedge b \leq b \leq b \vee c$ پس طبق گزاره‌ی (۱ - ۱.۳۰) $a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c)$، دوباره چون $a \wedge c \leq a$ و $a \wedge c \leq c \leq b \vee c$ لذا طبق گزاره‌ی (۱ - ۱.۳۰) $a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$ بنابراین $a \wedge (b \vee c)$ یک کران بالای $\{a \wedge b, a \wedge c\}$ است از این رو:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$$

اثبات ب مشابه الف انجام می‌شود. □

تعریف ۱-۱.۳۶ مشبکه $(L, \wedge, \vee)$، توزیع‌پذیر است هرگاه

$$\forall a, b, c \in L \quad : \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

مثال ۱-۱.۳۷ به وضوح مشبکه $(P(X), \cap, \cup)$ یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر است.

مثال ۱-۱.۳۸ مشبکه $(D(n), |)$ یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر است.

گزاره ۱-۱.۳۹ مشبکه $(L, \wedge, \vee)$ توزیع‌پذیر است اگر و فقط اگر

$$\forall a, b, c \in L \quad : \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

اثبات. فرض کنید L توزیع‌پذیر باشد در این صورت بنابر قانون جذب و خاصیت شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری داریم

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] = a \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ &= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] = [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee (b \wedge c)\end{aligned}$$

برعکس، به ازای هر $a, b, c \in L$ داریم

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= [(a \wedge b) \vee a] \wedge [(a \wedge b) \vee c] = a \wedge [(a \wedge b) \vee c] \\ &= a \wedge [(c \vee a) \wedge (c \vee b)] = [a \wedge (c \vee a)] \wedge (c \vee b) \\ &= a \wedge (c \vee b) = a \wedge (b \vee c)\end{aligned}$$

بنابراین L، توزیع‌پذیر است. □

تذکر ۱-۱.۴۰ متمم یک عنصر در مشبکه‌ها در صورت وجود، لزوماً منحصربه‌فرد نیست اما در مشبکه‌های توزیع‌پذیر، متمم یک عنصر در صورت وجود، منحصربه‌فرد است؛ زیرا فرض کنید (فرض خلف) که c و b متمم a باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} b &= b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) \\ &= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c = 1 \wedge c = c \end{aligned}$$

بنابراین می‌توانیم در مشبکه‌های توزیع‌پذیر، متمم عنصر a را (در صورت وجود) با نماد a' نمایش دهیم.

تعریف ۱-۱.۴۱ زیرمجموعه ناتهی S از مشبکه L «زیرمشبکه L» نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $a, b \in S$، $a \wedge b$ و $a \vee b$ در S باشند. به وضوح، اشتراک زیرمشبکه‌ها، نیز یک زیرمشبکه است.

تعریف ۱-۱.۴۲ فرض کنید $(L, \wedge, \vee)$ یک مشبکه باشد و $X \subseteq L$ ناتهی باشد اشتراک همه زیرمشبکه‌های L شامل X، «زیرمشبکه‌ی تولید شده به وسیله X» نامیده می‌شود و با نماد $L(X)$ نشان خواهیم داد.

لم ۱-۱.۴۳ زیرمشبکه‌ی تولید شده به وسیله مجموعه‌ی متناهی از عناصر یک مشبکه توزیع‌پذیر، متناهی است.

اثبات. فرض کنید L یک مشبکه توزیع‌پذیر باشد. مجموعه متناهی $T = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ از عناصر مشبکه L را در نظر می‌گیریم. چون L توزیع‌پذیر است لذا $L(T)$ (زیرمشبکه تولید شده به وسیله T)، نیز توزیع‌پذیر است بنابراین هر عنصر $L(T)$ را می‌توان توسط یک چندجمله‌ای که سوپریمم متناهی از تک‌جمله‌ای‌ها است، نمایش داد به‌طوری‌که هر تک‌جمله‌ای اینفیموم متناهی از عناصر T است. می‌دانیم $\vee$ و $\wedge$ در مشبکه L دارای خاصیت خودتوانی و جابجایی هستند لذا هر تک‌جمله‌ای $L(T)$ معادل با تک‌جمله‌ای به