دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک نظری و اخترفیزیک

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته فیزیک نظری

عنوان

فضاهای تصویری مختلط فازی

استاد راهنما:

دکتر حسین فخری

استاد مشاور:

دکتر سید کمال‌الدین سید یعقوبی

پژوهشگر:

امین هاشمی شهرکی

تابستان ۹۰

نام خانوادگی دانشجو: هاشمی شهرکی نام: امین

عنوان پایان نامه: فضاهای تصویری مختلط فازی

استاد راهنما: دکتر حسین فخری
استاد مشاور: دکتر سید کمال الدین سید یعقوبی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: فیزیک
گرایش: نظری دانشگاه: تبریز
دانشکده: فیزیک تاریخ فارغ التحصیلی: تابستان ۹۰ تعداد صفحات: ۱۱۶

کلید واژه: هندسه ناجابجایی، ضرب ستاره، کلاف های خطی فازی، مشخصه چرن، بارهای توپولوژیکی، کره فازی

چکیده: یک عبارت صریح برای ضرب ستاره شرکت پذیر روی فضاهای تصویری مختلط فازی CP_F^{N-1} مطالعه شده است. جبر گسسته ناجابجایی از توابع روی CP_F^{N-1} با ضرب ماتریسی نشان داده می شود.ماتریس ها محدود به ماتریس هایی که بعدشان برابر بعد نمایش های کاملاً متقارن SU(N) اند می شوند. در حد ماتریس های نامتناهی البعد جبر جابجایی توابع روی CP^{N-1} باز تولید شده است. مشتق های روی CP_F^{N-1} همچنین بر حسب جابجاگر های ماتریسی بیان شده است.
برای مورد خاص N=۲ با استفاده از نظریه کلاف های برداری هم متعدد کوانتیزه شده روی مدارهای هم الحاقی فشرده، مشخصه های چرن همه کلاف های خطی روی کره فازی با توجه به حساب دیفرانسیل بر مبنای مشتق های آن مشخص شده است. عددهای چرن وابسته (بارهای توپولوژیکی) غیر صحیح بدست می آیند که در حد جابجایی عددهای چرن شناخته شده کلاف های خطی مختلط روی کره-۲ را باز تولید کرده اند.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

مقدمه

فصل اول:

مقدمه و بررسی منابع

مفهوم هندسه ناجابجایی[۲و۱] به عنوان یکی از نوید دهنده‌ترین و جالب‌ترین ابزارهای جدید در نظریه میدان کوانتومی در حال ظهور است. هندسه ناجابجایی همچنین بینش-های جدید نسبت به ساختار ممکن فضا- زمان در سطح کوانتوم گراویتی فراهم می‌کند. در نظریه میدان کوانتومی هندسه ناجابجایی می‌تواند یک تکنیک ساماندهی[1] که کاملاً سازگار با تقارن‌های فضا- زمان نظریه است فراهم کند [۱۷-۳] در حالی که در کوانتوم گراویتی اشاره به رهیافت‌های بنیادینی دارد. هندسه ناجابجایی همچنین چندین کاربرد در نظریه ریسمان پیدا کرده است [۱۸].

هندسه ناجابجایی در مدل ماتریسی‌اش یا فرم فازی[2] (فضاهای فازی تقریب‌های ماتریسی گسسته به منیفلدهای پیوسته می‌باشند) نوید امکان دیگر برای نظریه میدان شبکه‌ای [3] می‌دهد که مسائلی مانند جفتیدگی فرمیون کایرال [4] بوجود نمی‌آید[۱۳]. مشکل اصلی برای توسعه این امکان فازی به نظریه‌های شبکه‌ای کمی فضاهای فازی با تعریف صریح است. یک عنصر مهم برای فهم حد پیوسته این مدل‌های فازی ضرب -* است. ضرب -* یک ضرب ناجابجایی برای توابع است، که در مورد فضاهای فازی

[1] -regularisation
[2] -Fuzzy
[3] -lattice field theory
[4] -chiral fermion doubling

ضرب ماتریسی را نشان می‌دهد. یک مثال صریح برای ضرب -* برای کره- ۲ معلوم شده است [۲]. معلوم شده است که ضرب -* می‌تواند بصورت سری‌های توانی صوری روی هر منیفلدی که ساختار همتافته[1] یا پواسونی می‌پذیرد تعریف شود. اما مثال‌های صریح کمی شناخته شده‌اند.

نظریه‌های میدان پیمانه‌ای کلاسیکی هم خصوصیات جالبی وابسته به هندسه و توپولوژی کلاف‌های تاری[2] غیربدیهی(روی فضا یا فضا- زمان) از خود نشان می‌دهند. برای مثال جواب تک قطبی و انستانتون[3].

قضیه سرسوآن [۲۵][4] (برای مثال نگاه کنید به [۲۷و۲۶]) منجر به یک هم‌ارزی کامل بین رسته[5] کلاف‌های برداری[6] پیوسته روی یک منیفلد فشرده M و مدول‌های تصویری[7] متناهیاً تولید شده روی جبر- C^* جابجایی یکه‌ای $C(M)$ از توابع پیوسته روی M، می‌شود. این امر می‌تواند تعمیم داده شود به مورد هموار [۲۷] و حتی برای منیفلدهای غیر فشرده. بعلاوه هندسه M در $C(M)$ کدبندی شده است.

در هندسه ناجابجایی کلاف‌های برداری به عنوان مدول‌های مضاعف[8] یا مدول‌های راست یا چپ تصویری متناهیاً تولید شده روی جبری تعریف می‌شوند که به عنوان جبر

---

[1] -symplectic
[2] -fiber bundles
[3] -instanton
[4] -serre –swan theorem
[5] -category
[6] -vector bundles
[7] -projective modules
[8] -bimodules

توابع روی منیفلد ناجابجایی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین غیربدیهی بودن هندسی [۱] کاملاً جبری است و صرفاً در مدول‌های غیر آزاد[۲] تصویری روی جبر ناجابجایی تحت بررسی کدبندی شده است.

برای کره فازی این مورد در [۲۸] (همچنین نگاه کنید به [۲۹]) برای اولین بار تجزیه و تحلیل شده است. یک رهیافت متفاوت استفاده از سه تایی طیفی[۳] و حساب دیفرانسیل بر پایه عملگر دیراک آن در [۳۱و۳۰] استفاده شده است. که منجر به بارهای توپولوژیکی صحیح مشابه [۲۸] می‌شوند.

در این پایان‌نامه ابتدا در بخش اول یک بحث کلی در مورد ضرب -* که تشریح می‌کند چه موقع انتظار داریم ضرب -* وجود داشته باشد، بخصوص چه موقع ساختار داده شده بر اساس ضرب‌های هم‌متعدد [٤] باید وجود داشته باشد، داده شده است. سپس یک توصیف از فضاهای تصویری مختلط برحسب مختصات سرتاسری آمده است. در نهایت عمل فازی کردن این فضا توسط معرفی یک ضرب -* برای آن صورت گرفته و شکل صریح این ضرب -* بدست آورده شده است. در بخش دوم از بین فضاهای تصویری مختلط فازی CP_F^{N-1} مورد خاص CP_F^1 یعنی کره فازی در نظر گرفته شده است. در

[1] -geometrical nontriviality
[2] -non free modules
[3] -spectral triples
[4] -equivariant products

این بخش ابتدا تعریف مشخصه چرن[1] روی مدول‌های تصویری و سپس کلاف‌های خطی[2] مختلط روی کره-۲ را مرور می‌کنیم. بعد با استفاده از نظریه کلاف‌های برداری هم‌متعدد کوانتیزه شده روی مدارهای هم‌الحاقی[3] مشخصه چرن تمام کلاف‌های خطی ناجابجایی روی کره فازی را با در نظر گرفتن حساب دیفرانسیل بر مبنای مشتقات بدست می‌آوریم. این مشخصه‌های چرن منجر به اعداد چرن[4] غیرصحیح می‌شود. در حد جابجایی مشخصه‌های چرن شناخته شده از کلاف‌های خطی مختلط روی کره- ۲ با بارهای توپولوژیکی صحیح‌شان باز تولید خواهند شد.

[1] -chern character
[2] -line bundles
[3] -Coadjoint orbits
[4] -chern numbers

فصل دوم:

مبانی و روش‌ها

۲-۱ فضاهای تصویری مختلط فازی و ضرب ستاره‌شان

۲-۱-۱ توابع فازی

اگر بخواهیم نظریه میدان روی یک مینفلد پیوسته را گسسته سازی کنیم مشکلاتی وجود دارد که باید بر آنها غلبه کرد. یک مورد مهم این است که تقارن‌های پیوسته از بین می روند و توجه زیادی باید کرد که آنها دوباره در حد پیوسته بدست آیند. یک مشکل دیگر که در فضای فوریه رخ می‌دهد و اغلب بخاطر اینکه حل آن بنظر ساده می‌آید به آن توجه نمی‌شود این است که در حالت کلی جبر توابع در فضای فوریه قطع شده[1]، بسته نیست. برای مثال اگر توابع روی دایره را تجزیه فوریه کنیم

$$f(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta} \qquad (۲-۱-۱)$$

و آنها را با قطع کردن سری فوریه در یک فرکانس بیشینه، L، تقریب بزنیم.

$$f_L(\theta)=\sum_{n=-L}^{L} f_n e^{in\theta} \qquad (۲-۱-۲)$$

[1] - truncated

آنگاه ضرب دو تابع این چنینی در حالت کلی به فرکانس‌هایی تا $۲L$ توسیع می‌شود، بنابراین جبر توابع قطع شده تحت ضرب بسته نیست. مشکل مشابهی برای توابع روی کره وقتی برحسب هماهنگ‌های کروی بسط داده می‌شوند و سپس با قطع کردن بسط در یک تکانه زاویه‌ای بیشینه تقریب زده می‌شوند ظاهر می‌شود. یک راه حل ساده لوحانه آنست که بعد از ضرب، تابع حاصل را تصویر کنیم و تمام فرکانس‌های بیشتر از L را دور بریزیم. در حالی که این روش خشن ممکن است کار کند ولی بدون مشکل نیست. برای مثال این روش در حالت کلی غیر شرکت پذیر است.

در بعضی موارد یک روش با ضرافتی وجود دارد که اجازه می‌دهد بعضی فضاها گسسته شوند در حالی که تقارن‌های پیوسته آنها را حفظ می‌کند. روش این است که ضرایب در بسط هماهنگ توسط عناصر یک ماتریس مشخص شوند. اگر ضرب دو تابع بتواند توسط ضرب ماتریسی انجام شود بنابراین جبر ماتریس‌ها بسته خواهد بود و نیازی به تصویر کردن نمی‌باشد.

برای مثال کره دو بعدی را در نظر بگیرید که می‌تواند توسط فضای هم مجموعه[1] $S^۲ \cong SU(۲)/U(۱)$ نوشته شود. یک تابع عمومی روی $SU(۲)$ می‌تواند توسط ماتریس‌های D بسط داده شود.

$$1+8+27+64+\ldots \qquad (۲-۱-۸)$$

[1] - Coset space

قطع کردن l در یک مقدار بیشینه L همیشه به تعداد ضرایب اجازه می‌دهد که در یک ماتریس مربعی چیده شوند. بنابراین $L=1$ می‌دهد $\bar{3}\times 3=1+8$ و $L=2$ می‌دهد. $\bar{6}\times 6=1+8+27$ و $L=3$ می‌دهد $\overline{10}\times 10=1+8+27+64$ و به همین ترتیب. قطع کردن در L، ماتریس مربعی به اندازه $(L+2)(L+1)/2$ می‌دهد که برابر بعد ضرب تانسوری متقارن L تا 3 (یا L تا $\bar{3}$) است و

$$\sum_{l=0}^{L}(l+1)^3=\frac{(L+2)^2(L+1)^2}{4} \qquad (۲-۱-۹)$$

دوباره نظریه نمایش گروه تضمین می‌کند که ضرب ماتریس‌ها در همان نمایش باقی بماند و بیشتر از L نشود. این دستورالعمل به فضاهای تصویری مختلط با ابعاد بالاتر CP^{N-1} تعمیم داده می‌شود، که ماتریس‌ها در کوچکترین تقریب غیر بدیهی با $\bar{N}\times N=1+(N^2-1)$ شروع می‌شوند و بعدی با $\overline{\frac{N(N+1)}{2}}\times\frac{N(N+1)}{2}=1+(N^2-1)+N^2(N^2+2N-3)/4$ و غیره.

قطع کردن در L یک تقریب نمایش ماتریسی $[(N-1+L)!/(N-1)!L!]\times[(N-1+L)!/(N-1)!L!]$ از CP^{N-1} می‌دهد.

یک قطع مشابه برای مینفلدهای گراسمنی یکانی[1] کارآمد است [۱۷]. بهر حال همیشه اینطور نیست که نظریه نمایش اجازه دهد که بسط توابع روی یک فضای هم مجموعه

[1] - unitary Grassman manifolds

برحسب ماتریس‌های مربعی مانند این موارد توصیف شود. ولی وقتی این کار قابل انجام باشد ما می‌توانیم یک ضرب ستاره روی نسخه فازی فضا تعریف کنیم.

۲-۱-۲ ضرب-*

در این بخش یک بحث کلی در مورد ضرب -* با تاکید بر ضرب‌های -* هم متعدد[1] ارائه می‌دهیم. فرض کنید یک جبر $\hat{A}$از عملگرهای خطی روی یک فضای برداری متناهی البعد داریم. فرض می‌کنیم اگر $\hat{F} \in \hat{A}$ باشد آنگاه همیوغ هرمیتی آن $\hat{F}^{+} \in \hat{A}$ بنابراین $\hat{A}$ یک جبر -* است. اجازه می‌دهیم یک گروه لی فشرده همبند $G = \{g\}$ به وسیله عمل الحاقی ماتریس‌های یکانی روی $\hat{A}$ عمل کند.

$$\hat{F} \mapsto \hat{D}(g)\hat{F}\hat{D}^{-1}(g) \ , \hat{D}^{+}(g)D(g) = 1 \qquad (۲-۱-۱۰)$$

طبق قضیه ودربرن[2] [۲۲، قضیه ۸. ۳. ٦] که بیان می‌دارد اگر $\hat{A}$ یک جبر C^{*} با بعد متناهی و غیر صفر باشد، *- یکریخت[3] است با $Mat_{d_1} \oplus \ldots \oplus Mat_{d_k}$ به ازای تعدادی عدد صحیح $d_1, \ldots.., d_k$ می‌توانیم $\hat{A}$ را بصورت جمع مستقیم جبرهای ماتریسی کامل[4] Mat_d از ماتریس‌های $d \times d$ در نظر بگیریم: $\hat{A} = \underset{d}{\oplus} Mat_d$. چون عمل

---

[1]- equivariant
[2] -Wedder burn's theorem
[3]- isomorphic
[4]-Full matrix algebras

$\hat{D}(g)$ ، $\hat{A}$ را حفظ می‌کند آنهم بصورت $\hat{D}(g)=\underset{d}{\oplus}\hat{D}^{(d)}(g)$ تجزیه می‌شود. چون Mat_d ساده[1] است، ایده‌آل‌های دو سویه $\hat{A}$ همگی به شکل جمع مستقیم تعدادی Mat_d یا فقط $\{o\}$اند.

برای داشتن یک ضرب -* ما بعلاوه نیاز به یک تابع $\hat{\rho}^*$ روی مینفلد M با مقادیری در $\hat{A}^*$، دوگان $\hat{A}$ داریم. بنابراین $<\hat{\rho}^*,\hat{F}>:=F$ یک تابع روی M است

$$<\hat{p}^*,\hat{F}>(\xi)\equiv<\hat{\rho}^*(\xi),\hat{F}>=F(\xi) \qquad (۲-۱-۱۱)$$

که $\xi\in \mathrm{M}$. نگاشت $\hat{A}\to C_F^{\infty}(M)\subset C^{\infty}(\mathrm{M})$ (پیوستگی مناسب مورد نیاز را فرض می‌کنیم)یک ساختار جبری روی $C_F^{\infty}(M)$ اعمال می‌کند. اگر هسته[2] Ker، آن یک ایده-آل دو سویه در $\hat{A}$ باشد. همانطور که اشاره شد ایده‌آل‌های دو سویه $\hat{A}$ همگی به شکل جمع مستقیم تعدادی Mat_d یا فقط $\{o\}$ می‌باشند. بنابراین اگر Ker یک جمع مستقیم تعدادی Mat_d یا $\{o\}$ باشد طبق قضیه اول یکریختی داریم $C_F^{\infty}(M)\cong \hat{A}/Ker$ و ضرب جبر آن به وسیله رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$(F*G)(\xi)=<\hat{\rho}^*(\xi),\hat{F}\hat{G}> \qquad (۲-۱-۱۲)$$

که $\hat{F},\hat{G}\in\hat{A}$.

[1] -Simple
[2]-kernel

عمل (۱۰-۱-۲) روی $\hat{A}$ یک عمل روی دوگان آن $\hat{A}^*$ ایجاد می‌کند که با $\hat{F}^* \to \hat{D}^{*-1}(g)\ \hat{F}^*\ \hat{D}^*(g)$ بیان می‌شود.

$$< \hat{F}^*, \hat{D}(g)\hat{F}\hat{D}(g)^{-1} >=< \hat{D}(g)^{*-1}\hat{F}^*\hat{D}(g)^*, \hat{F} > \qquad (۲-۱-۱۳)$$

تا اینجا هیچ لزومی نیست که $\hat{\rho}^*(\xi)$ یک حالت[1]باشد یا هم متعددی [2] داشته باشد. ساختار خیلی کلی است. فرض کنید تقاضا کنیم $\hat{\rho}(\xi)$ یک حالت باشد. بدین معنا که روابط زیر را برآورده کند.

$$< \hat{\rho}^*(\xi), \hat{F}^+ >=\overline{< \hat{\rho}^*(\xi), \hat{F} >} \qquad (۲-۱-۱٤)$$

$$< \hat{\rho}^*(\xi), \hat{F}^+\hat{F} > \geq 0 \qquad (۲-۱-۱۵)$$

$$< \hat{\rho}^*(\xi), \hat{1} >=1 \qquad (۲-۱-۱٦)$$

که بار بیان کننده همیوغ مختلط است. بنابراین $\hat{\rho}^*(\xi)$ می‌تواند توسط یک ماتریس چگالی $\hat{\rho}(\xi)$ معلوم شود.

$$< \hat{\rho}^*(\xi), \hat{F} >= Tr\left(\hat{\rho}(\xi)\hat{F}\right) \qquad (۲-۱-۱۷)$$

برای هم متعددی ما فرض می‌کنیم که g بطور انتقالی [3] روی M عمل کند. $\xi \to g\xi$ به گونه‌ای که

$$\hat{\rho}^*(g\xi) = \hat{D}^*(g)\hat{\rho}^*(\xi)\hat{D}^*\left(g^{-1}\right) \qquad (۲-۱-۱۸)$$

[1] -State
[2] -equivariance
[3]-transitively