دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم

گراف مقسوم‌علیه صفر بر مبنای یک ایدآل برای یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (گرایش جبر)

نجمه صبوری شیرازی

استاد راهنما

دکتر سعید صفاییان

۱۳۹۲

سپاسگذار کسانی هستم که سرآغاز تولّد من هستند. از یکی زاده شدم و از دیگری جاودانه. استادی که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت، مادری که تار مویی از او به پای من سیاه نماند و پدری که دستانش استوار ترین تکیه گاهم بود. همچنین قدردان برادر و خواهرم هستم که همراهان همیشگی و پشتوانه‌های زندگی من هستند. امروز هستی‌ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما.

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم.

بوسه بر دستان پر مهرشان

فهرست مطالب

چکیده:

فرض کنید R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد. به حلقه‌ی R یک گراف به نام $\Gamma(R)=<V(\Gamma(R)),E(\Gamma(R))>$ نظیر می‌کنند که در آن $V(\Gamma(R))=Z(R)\backslash\{0\}$ ($Z(R)$ مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R می‌باشد.) و دو گره x و y از $\Gamma(R)$ مجاورند هرگاه، $xy=0$. مجموعه‌ی $\{0\}$ یک ایدآل از حلقه‌ی R است.

سؤال این پایان‌نامه آن است که اگر به‌جای $\{0\}$، ایدآل دلخواه I در کل تعریف فوق جایگذاری شود،گراف حاصل دارای چه ویژگی‌هایی است؟ بر این اساس برای ایدآل دلخواه I از حلقه‌ی R، گراف $\Gamma_I(R)$ را به R نسبت می‌دهیم. مجموعه‌ی گره‌ها در گراف $\Gamma_I(R)$ تمام $x-$ های متعلق به $R\backslash I$ است به‌طوری‌که برای یک عضو y متعلق به $R\backslash I$، xy متعلق به I باشد. دو گره x و y را در $\Gamma_I(R)$ مجاور می‌نامیم هرگاه xy یک عضو از I باشد.

در این پایان‌نامه علاوه بر سایر نتایج نشان خواهیم داد برای ایدآل دلخواه I از حلقه‌ی R، گراف $\Gamma_I(R)$ همبند با قطر کمتر یا مساوی ۳ است. I اوّل است اگر و تنها اگر $\Gamma_I(R)=\emptyset$. همچنین $\Gamma_I(R)$ شامل $|I|$ زیرگراف مجزای یک‌ریخت با $\Gamma(\frac{R}{I})$ است. علاوه‌برآن تمام حلقه‌هایی که گراف مقسوم‌علیه‌صفر آن‌ها شامل ۵ رأس می‌باشند را مشخص می‌کنیم.

در پایان مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر را به مدول‌ها تعمیم داده و قضایای اصلی گراف حلقه‌ها را به مدول‌ها و زیرمدول‌های آن‌ها توسعه خواهیم داد.

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ مقدمه‌ای بر نظریه‌ی گراف

تعریف ۱.۱ اگر V را مجموعه‌ی رأس‌ها، E را مجموعه‌ی لبه‌ها و $f : V \times V \longrightarrow E$ یک تابع با ضابطه‌ی $f(u,v) = uv$ در نظر بگیریم، آن‌گاه گراف G به صورت $G =< V, E, f >$ نمایش داده می‌شود. چون یال‌ها غیرجهت‌دار هستند، پس $uv = vu$.

تعریف ۲.۱ تعداد گره‌های گراف G را اندازه‌ی G می‌نامیم و با $| G |$ نشان می‌دهیم.
اگر $| G |= 0$، آن‌گاه گراف G را تهی می‌نامیم و اگر $| G |< \infty$، آن‌گاه می‌گوییم گراف G متناهی است.

تعریف ۳.۱ فرض کنید $G =< V, E >$ یک گراف باشد. در این صورت گراف $G' =< V', E' >$ یک زیرگراف از G نامیده می‌شود اگر $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$.

تعریف ۴.۱ یالی که ابتدا و انتهای آن یکی باشد را طوقه می‌نامیم.

تعریف ۵.۱ برای هر گره از گراف G، تعدا لبه‌های متلاقی با گره v را درجه‌ی گره v می‌نامیم و آن را با $\deg(v)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱ دو گره u و v را مجاور گوییم هر گاه توسط یک یال به هم وصل شده‌باشند.

تعریف ۷.۱ فرض کنید $V = \{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$. در این صورت گراف $G =< V, E >$ را خطی گوییم اگر $E = \{v_۱v_۲, v_۲v_۳, \cdots, v_{n-۱}v_n\}$.

تعریف ۸.۱ گراف G را کامل می‌نامیم هرگاه تمام گره‌های آن مجاور باشند.

تعریف ۹.۱ یک مسیر از u به v دنباله‌ای از گره‌های مجاور است که از گره u شروع و به گره v ختم می‌شوند.

تعریف ۱۰.۱ یک دور در گراف G مسیری است که از یک گره شروع و به همان گره ختم می‌شود.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید G یک گراف و P یک مسیر از آن باشد. در این صورت تعداد لبه‌های موجود در مسیر P را طول آن مسیر می‌نامیم و با $\mathrm{length}(P)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید G یک گراف و x و y دو رأس از آن باشد. طول کوتاه‌ترین مسیر از x به y را با $d(x, y)$ نمایش می‌دهیم. دقت کنید که اگر بین x و y هیچ مسیری وجود نداشته‌باشد، آن‌گاه $d(x, y) = \infty$.

تعریف ۱۳.۱ فرض کنید G یک گراف و x و y دو رأس مجزا از آن باشند. قطر گراف G را با $\mathrm{diam}(G)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{diam}(G) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in V(G)\}$$

تعریف ۱۴.۱ فرض کنید G یک گراف باشد. طول کوتاه‌ترین دور در G را کمر G می‌نامیم و با $\mathrm{gr}(G)$ نمایش می‌دهیم. اگر گراف G هیچ دوری نداشته‌باشد، می‌گوییم $\mathrm{gr}(G) = \infty$.

تعریف ۱۵.۱ گراف G را همبند گوییم، اگر بین هر دو گره از این گراف حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

اگر گراف G همبند نباشد، آن‌گاه این گراف را ناهمبند می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۱ گراف همبند بدون دور را درخت می‌نامیم.

تعریف ۱۷.۱ فرض کنید G یک گراف با مجموعه رأس‌های V باشد. در این صورت گراف G را یک گراف دوبخشی گوییم اگر زیر مجموعه‌های V_1 و V_2 از V وجود داشته باشند که در شرایط زیر صدق کنند.

۱. $V_1 \bigcap V_2 = \emptyset$

۲. $V_1 \bigcup V_2 = V$

۳. هیچ دو گرهی از V_1 و هیچ دو گرهی از V_2 باهم مجاور نباشند.

اگر هر گره از V_1 با هر گره از V_2 مجاور باشد، آن‌گاه G را یک گراف دوبخشی کامل می‌گوییم.

اگر $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$ باشد، گراف دوبخشی کامل G را با $K^{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

در این قسمت به معرفی گراف ستاره که حالت خاصی از گراف دوبخشی می‌باشد می‌پردازیم. همچنین چند خصوصیت کاربردی از گراف‌های دوبخشی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۱۸.۱ گراف G دوبخشی است اگر و تنها اگر طول هر دور در گراف G زوج باشد.

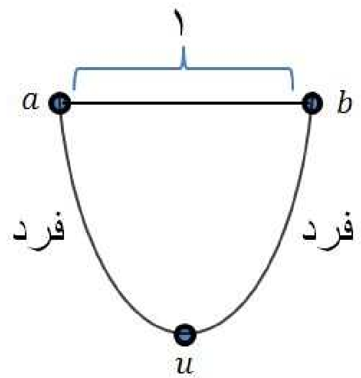
اثبات. فرض کنیم V_1 و V_2 دو بخش از گراف همبند و دوبخشی G باشند. در این صورت V_1 و V_2 زیرمجموعه‌هایی از $V(G)$ هستند به‌طوری‌که $V = V_1 \bigcup V_2$ و $V_1 \bigcap V_2 = \emptyset$.
فرض کنیم $C = x_1 - x_2 - \cdots - x_n - x_1$ یک دور در G باشد. در این صورت x_1 یک عضو از V است، لذا x_1 یا عضوی از V_1 است و یا V_2. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض کنیم x_1 متعلق به V_1 باشد. چون x_1 و x_2 مجاور هستند و x_1 در V_1 است، پس x_2 متعلق به V_2 می‌باشد.
از طرفی x_2 و x_3 مجاور هستند و x_2 متعلق به V_2 است. لذا x_3 یک عضو از V_1 است.
اگر به همین ترتیب ادامه دهیم خواهیم دید که $x_1, x_3, \cdots, x_{n-1}$ عضوهایی از V_1 و $x_2, x_4, \cdots, x_n$ عضو هایی از V_2 هستند. بنابراین طول C برابر با n است و n نیز عددی زوج می‌باشد.
برعکس، فرض کنیم طول هر دور در G زوج باشد و u یک گره دلخواه از $V(G)$ باشد. دو مجموعه‌ی V_1 و V_2 را به این صورت تعریف می‌کنیم.

$$V_1 = \{v \in V(G) \mid \text{یک مسیر به طول فرد بین } u \text{ و } v \text{ وجود داشته‌باشد}\}$$

و

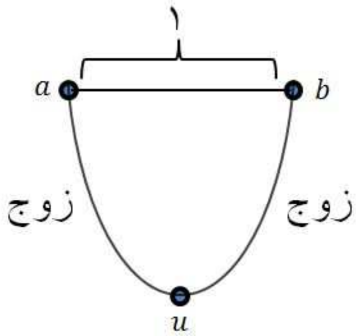
$$V_2 = V \backslash V_1$$

نشان می‌دهیم که V_1 و V_2 دو بخش از گراف G هستند.
۱. با توجه به نحوه‌ی تعریف V_1 و V_2 می‌دانیم که $V_1 \bigcap V_2 = \emptyset$ و $V_1 \bigcup V_2 = V(G)$.
۲. نشان می‌دهیم که هیچ دو گرهی از V_1 با هم مجاور نیستند. فرض کنیم a و b دو رأس مجاور از بخش V_1 باشند. در این صورت یک دور به طول فرد بین a و u و یک مسیر به طول فرد بین b و u وجود دارد. در نتیجه با توجه به شکل زیر بین a تا a یک دور به طول فرد وجود دارد که این یک تناقض است.



شکل (۱)

۳. نشان می‌دهیم هیچ دو رأسی از V_2 با هم مجاور نیستند. اگر u یک عضو از V_1 باشد، آن‌گاه یک مسیر به طول فرد بین u و u وجود دارد و این بدان معنی است که یک دور به طول فرد در G وجود دارد و این یک تناقض است. بنابراین u متعلق به V_2 می‌باشد.
فرض کنیم a و b دو رأس از بخش V_2 باشند.
الف. اگر $a \neq u \neq b$ و a و b دو رأس مجاور باشند با توجه به این‌که a و b عضو V_1 نی‌ستند، اگر مسیری بین a و u و b و u وجود داشته باشد، آن‌گاه طول آن مسیر زوج است. از طرفی چون گراف G همبند است، پس بین a و b با u مسیری وجود دارد. بنابراین با توجه به شکل زیر، واضح است که یک دور به طول فرد بین u و u وجود دارد و این یک تناقض است.



شکل (۲)

ب. اگر a و b مجاور باشند و $a = u$ یا $b = u$، آن‌گاه $u = a - b - u$ و یا $u = b - a - u$. چون هر مسیر بین a با u و b با u زوج است، پس G شامل یک دور به طول فرد می‌باشد و این یک تناقض است.
در نتیجه a و b مجاور نیستند.

با توجه به موارد ۱، ۲ و ۳ تمام شرایط برای دوبخشی بودن گراف G برقرار است و لذا G یک گراف دوبخشی است. ■

تعریف ۱.۱۹ برای هر عدد صحیح n، گراف $K^{1,n}$ را گراف ستاره می‌نامیم.

لم ۱.۲۰ اگر G یک گراف دوبخشی باشد، آن‌گاه هر زیر گراف از آن نیز دو بخشی است.

اثبات. فرض کنیم $W_۱$ و $W_۲$ دو بخش از گراف G و G' یک زیرگراف از G باشد. واضح است که هر رأس از G' یک رأس از G نیز می‌باشد. دو مجموعه‌ی $S_۱$ و $S_۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S_۱ = \{v \in V(G') \mid v \in W_۱\} \quad , \quad S_۲ = V(G') \backslash S_۱$$

۱. به آسانی دیده می‌شود که $S_۱ \bigcap S_۲ = \emptyset$ و $S_۱ \bigcup S_۲ = V(G')$.

۲. فرض کنیم a و b دو رأس از $S_۱$ باشند. در این صورت a متعلق به $W_۱$ و b متعلق به $W_۱$ است. بنابراین a و b مجاور نیستند. در نتیجه هیچ دو رأسی از $S_۱$ مجاور نیستند.

۳. فرض کنیم c و d دو رأس از $S_۲$ باشند. در این صورت c متعلق به $W_۲$ و d متعلق‌به $W_۲$ است. بنابراین c و d مجاور نیستند. در نتیجه هیچ دو رأسی از $S_۲$ مجاور نیستند.

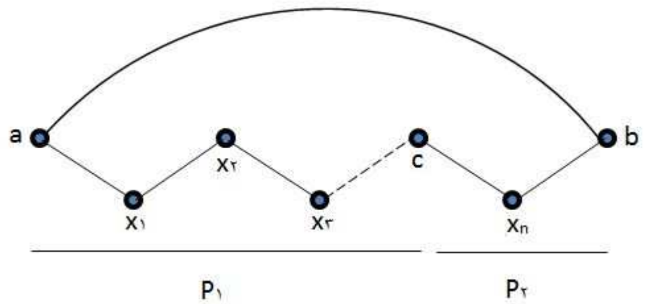
با توجه به موارد ۱ و ۲ و ۳، نتیجه می‌شود که زیرگراف G' دو بخشی است. چون G' را یک زیرگراف دلخواه از گراف G در نظر گرفتیم، پس هر زیر گراف از G دوبخشی است. ■

قضیه ۲۱.۱ هر درخت یک گراف دوبخشی است.

اثبات. فرض کنیم G یک درخت باشد. در این صورت G شامل هیچ دوری نمی‌باشد. لذا طول هر دور در گراف G صفر (زوج) است و با توجه به قضیه‌ی ۱۸.۱، گراف G دوبخشی است. ■

قضیه ۲۲.۱ فرض کنید G یک گراف غیر جهت‌دار باشد که شامل یک دور است. در این صورت $\mathrm{gr}(G) \leq ۲\mathrm{diam}(G) + ۱$.

اثبات. فرض کنیم شکل زیر نمایان‌گر کوتاه‌ترین دور در گراف G باشد و آن را D می‌نامیم.



شکل (۳)

مسیر بین a و c را p_1 و مسیر بین c و b را p_2 می‌نامیم. می‌دانیم که $\mathrm{length}(p_1)$ همان $\mathrm{d}(c,a)$ می‌باشد. چون در غیر این صورت مسیری کوتاه‌تر از p_1 بین a,c وجود دارد و این یک تناقض است چون فرض کردیم D کوتاه‌ترین دور در G باشد.

$$\mathrm{gr}(G) = \mathrm{length}(D) = \mathrm{length}(p_1) + \mathrm{length}(p_2) + 1 = \mathrm{d}(c,a) + \mathrm{d}(c,b) + 1 \leq$$
$$\mathrm{diam}(G) + \mathrm{diam}(G) + 1 \leq 2\mathrm{diam}(G) + 1$$

تعریف ۲۳.۱ فرض کنید G یک گراف و v یک گره از آن باشد. در این صورت گراف $G-v$ گرافی است که از حذف گره v و تمام لبه‌های متلاقی با v حاصل شده است.

تعریف ۲۴.۱ اگر G یک گراف و e یک لبه از این گراف باشد، آن‌گاه گراف $G-e$ گرافی است که فقط از حذف لبه‌ی e از گراف G حاصل می‌شود.

۱—۲ مقدمه‌ای بر نظریه حلقه‌ها

تعریف ۲۵.۱ یک حلقه عبارتست از سه‌تایی مرتب $(R,+,.)$ به‌طوری‌که R مجموعه‌ای ناتهی است و $+$ و . دو عمل دوتایی روی R هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند.

۱. به ازای هر a و b و c متعلق به R، $(a+b)+c = a+(b+c)$.

۲. به ازای هر a و b متعلق به R، $a+b=b+a$.

۳. یک عضو مانند 0 در R وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که به ازای هر a متعلق به R، $a+0=a$.

۴. به ازای هر a متعلق به R، یک عضو مانند $-a$ متعلق به R وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که $a+(-a)=0$.

۵. به ازای هر a و b و c متعلق به R، $(a.b).c = a(b.c)$.

۶. به ازای هر a و b و c متعلق به R، $a.(b+c) = (a.b)+(a.c)$.

۷. به ازای هر a و b و c متعلق به R، $(b+c).a = (b.a)+(c.a)$.

0 را عنصر صفر حلقه $(R,+,.)$ می‌نامیم.

در طی توسعه‌ی نظریه حلقه‌ها قراردادهای زیر را به‌کار خواهیم برد.

۱.اجرای ضرب بر عمل جمع مقدم انجام می‌شود.

۲.به‌جای $a.b$ می‌نویسیم ab.

۳.به‌جای $a+(-b)$ می‌نویسیم $a-b$.

۴. $(R,+,.)$ را به صورت حلقه‌ی R می‌نویسیم.

تعریف **۲۶.۱** حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی متناهی نامند هرگاه R تنها دارای تعداد متناهی عنصر باشد. در غیر این صورت R را حلقه‌ی نامتناهی می‌نامند.

تعریف **۲۷.۱** فرض کنید R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد. در این صورت R را کاهش‌یافته می‌نامیم هرگاه به ازای هر عضو a متعلق به R، اگر $a^2=0$، آن‌گاه $a=0$.

تعریف **۲۸.۱** حلقه‌ی R را یکدار نامند هرگاه دارای عنصر همانی نسبت به عمل ضرب باشد.

قضیه **۲۹.۱** فرض کنید R یک حلقه و a و b و c متعلق به R باشند. در این صورت

۱. $a0=0a=0$،

۲. $a(-b)=(-a)b=a(ab)$

۳. $(-a)(-b)=ab$،

۴. $a(b-c)=ab-ac$ و $(b-c)a=ba-ca$.

اثبات. مراجعه شود به قضیه‌ی ۱۰.۱.۱۰ از مرجع [۶]. ■

تعریف **۳۰.۱** فرض کنید R یک حلقه و a یک عضو از R باشد. در این صورت

۱. a یک عضو خودتوان نامیده می‌شود هرگاه $a^2=a$.

۲. a یک عضو پوچ‌توان نامیده می‌شود هرگاه عدد صحیح مثبت n وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که $a^n=0$.

۳. a یک مقسوم‌علیه‌صفر چپ نامیده می‌شود هرگاه عضو ناصفر b از R وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که $ab=0$.

۴. a یک مقسوم‌علیه‌صفر راست نامیده می‌شود هرگاه عضو ناصفر b از R وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که

$ba = 0$.

۵. a یک مقسوم‌علیه‌صفر نامیده می‌شود هرگاه a هم مقسوم‌علیه چپ و هم مقسوم‌علیه راست باشد.

تعریف ۳۱.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و یک‌دار باشد. در این صورت R را حوزه‌ی صحیح نامند هرگاه R دارای هیچ مقسوم‌علیه‌صفر ناصفری نباشد.

تعریف ۳۲.۱ عدد صحیح و مثبت n را مشخصه‌ی R می‌نامند هرگاه n کوچک‌ترین عددی باشد که به ازای هر a متعلق به R، $na = 0$. اگر چنین عدد صحیح مثبتی موجود نباشد، آن‌گاه R را از مشخصه‌ی صفر می‌نامند.
مشخصه‌ی R را با $\mathrm{char}(R)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۳۳.۱ حلقه‌ی یک‌دار و تعویض‌پذیر R را میدان می‌نامند هرگاه هر عضو ناصفر آن وارون‌پذیر باشد.

گزاره ۳۴.۱ فرض کنید F یک میدان متناهی باشد. در این صورت عدد اوّل p و عدد صحیح مثبت n وجود دارد به‌طوری‌که $\mathrm{char}(F) = p$ و $|F| = p^n$.

اثبات. رجوع کنید به مرجع به قضیه‌ی ۳۰.۱.۱۰ از مرجع [۶] ■

تعریف ۳۵.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد در این صورت مجموعه‌ی تمام عناصر وارون‌پذیر R را با $U(R)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۳۶.۱ اگر R یک حلقه‌ی متناهی باشد، آن‌گاه هر عضو از R یا یکّه است و یا مقسوم‌علیه‌صفر.

اثبات. فرض کنیم a یک عضو از R باشد. اگر $a = \circ$، آن‌گاه a یک مقسوم‌علیه‌صفر است و مسأله تمام می‌شود.
فرض کنیم $a \neq \circ$. چون R متناهی است، پس R آرتینی است. بنابراین زنجیر زیر ایستا می‌باشد.

$$aR \supseteq a^{۲}R \supseteq \cdots$$

در نتیجه عدد صحیح $n \geq ۱$ وجود دارد به‌طوری‌که $a^nR = a^{n+۱}R = \cdots$ و لذا عضو r متعلق به R وجود دارد به‌طوری‌که عضو a^n از a^nR را می‌توان به صورت $a^n = a^{n+۱}r$ نوشت. بنابراین $a^n(۱ - ar) = \circ$. حال فرض کنیم a مقسوم‌علیه‌صفر نباشد. در این صورت

$$a^n(۱ - ar) = a(a^{n-۱}(۱ - ar)) = \circ$$

چون a مقسوم‌علیه‌صفر نیست و $a \neq \circ$، پس

$$a^{n-۱}(۱ - ar) = (a(a^{n-۲}(۱ - ar))) = \circ$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم خواهیم داشت، $۱ - ar = \circ$ و در نتیجه $ar = ۱$ و a یک عضو یکّه از R است. ■

گزاره **۳۷.۱** هر میدان یک حوزه‌ی صحیح می‌باشد.

اثبات. فرض کنیم R یک میدان و a و b دو عضو از R باشند به‌طوری‌که $ab = \circ$. باید نشان دهیم $a = \circ$ یا $b = \circ$. فرض کنیم $a \neq \circ$. در این صورت a یک عضو وارون‌پذیر می‌باشد چون هر عضو ناصفر از یک میدان وارون‌پذیر است. وارون a را $a^{-۱}$ می‌نامیم. بنابراین $\overbrace{a^{-۱}a}^{۱}b = \circ$. در نتیجه $b = \circ$. ■

گزاره **۳۸.۱** هر حوزه‌ی صحیح متناهی یک میدان است.

اثبات. فرض کنیم R یک حوزه‌ی صحیح متناهی باشد. چون R متناهی است، پس با توجه به گزاره‌ی ۳۶.۱ هر عضو ناصفر آن یا یکّه است و یا مقسوم‌علیه‌صفر. همچنین می‌دانیم که R حوزه‌ی صحیح

می‌باشد. بنابراین R مقسوم‌علیه‌صفر ندارد. در نتیجه هر عضو از R وارون‌پذیر می‌باشد و لذا R یک میدان است. ■

تعریف ۳۹.۱ فرض کنید R یک حلقه‌باشد. در این صورت زیر مجموعه‌ی ناتهی I از R یک اید آل R نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر عضو a و b متعلق به I و هر r متعلق به R، $a-b$ و ra متعلق به I باشند.

تعریف ۴۰.۱ اید آل M از حلقه‌ی R را ماکسیمال می‌نامیم هرگاه به ازای هر اید آل I از R اگر $R \subseteq I \subseteq M$، آن‌گاه $I = M$ یا $I = R$.

تعریف ۴۱.۱ اگر R یک حلقه و I اید آلی از آن باشد، آن‌گاه حلقه‌ی $(\frac{R}{I}, +, .)$ حلقه‌ی خارج‌قسمت R به‌وسیله‌ی I نامیده می‌شود.

قضیه ۴۲.۱ فرض کنید M یک اید آل از حلقه‌ی R باشد. در این صورت M یک اید آل ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{M}$ یک میدان باشد.

اثبات. مراجعه شود به قضیه‌ی ۳.۳ از مرجع [۱۵]. ■

تعریف ۴۳.۱ حلقه‌ی R را موضعی می‌نامند هرگاه تنها یک اید آل ماکسیمال داشته‌باشد.

تعریف ۴۴.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت اشتراک تمام اید آل‌های ماکسیمال R را جیکوبسون رادیکال حلقه‌ی R می‌نامیم و با $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۴۵.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی موضعی باشد. در این صورت $J(R) = R\backslash U(R)$.

اثبات. فرض کنیم x یک عضو از $R\backslash U(R)$ باشد. در این صورت ایدآل ماکسیمالی مانند M وجود دارد به‌طوری‌که x متعلق به M است. از طرفی با توجه به موضعی بودن حلقه‌ی R می‌دانیم که $J(R) = M$، لذا x یک عضو از $J(R)$ می‌باشد و

$$R\backslash U(R) \subseteq J(R)$$

حال فرض کنیم y یک عضو از $J(R) = M$ باشد. وارون‌پذیر بودن y متناقض با ماکسیمال بودن M است. بنابراین y متعلق به $R\backslash U(R)$ است و

$$J(R) \subseteq R\backslash U(R)$$

در نتیجه $J(R) = R\backslash U(R)$. ■

لم **۴۶.۱** (لم تسرن) فرض کنید $(V, <)$ مجموعه‌ی ناتهی جزئاً مرتبی با این ویژگی باشد که هر زیرمجموعه‌ی ناتهی کلاً مرتب V کران بالایی در V داشته‌باشد. در این صورت V دست‌کم یک عضو ماکسیمال دارد.

اثبات. مراجعه شود به لم ۳.۸ از مرجع [۱۵]. ■

تعریف **۴۷.۱** فرض کنید R یک حلقه و I و J دو ایدآل از آن باشند. در این صورت

$$(I :_R J) = \{r \in R \mid rJ \subseteq I\}$$

تعریف **۴۸.۱** ایدآل دوطرفه و سره P از حلقه‌ی R اوّل نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر ایدآل I و J از R اگر $IJ \subseteq P$، آن‌گاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

گزاره **۴۹.۱** فرض کنید P یک ایدآل سره از حلقه‌ی R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱. P یک ایدآل اوّل از R است.

۲. برای هر دو عضو a و b از R، اگر $<a><b> \subseteq P$، آن‌گاه a متعلق به P ایا b متعلق به P است.

۳. برای هر دو عضو a و b متعلق به R، اگر $aRb \subseteq P$، آن‌گاه a متعلق به P یا b متعلق به P است.

اثبات. رجوع کنید به قضیه‌ی ۱۰.۲ از مرجع [۱]. ■

نتیجه **۵۰.۱** فرض کنید P یک ایدآل سره از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت P یک ایدآل اوّل است اگر و تنها اگر به ازای هر دو عضو a و b از حلقه‌ی R، اگر ab یک عضو از P باشد، آن‌گاه a یا عضو P یا b عضو P باشد.

اثبات. اثبات مستقیماً از گزاره‌ی ۴۹.۱ حاصل می‌شود. ■

گزاره **۵۱.۱** هر ایدآل ماکسیمال از حلقه‌ی R اوّل است.

اثبات. فرض کنیم M یک ایدآل ماکسیمال از حلقه‌ی R باشد. همچنین I و J را دو ایدآل از حلقه‌ی R در نظر بگیریم به‌طوری‌که $IJ \subseteq M$ امّا $I \nsubseteq M$. در این صورت $M + I = R$. با ضرب J در طرفین تساوی فوق داریم، $\overbrace{MJ}^{\subseteq M} + \overbrace{IJ}^{\subseteq M} = RJ = J$. بنابراین $J \subseteq M$. در نتیجه M یک ایدآل اوّل از R می‌باشد. ■

قضیه **۵۲.۱** فرض کنید P یک ایدآل از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت ایدآل P اوّل است اگر و تنها اگر حلقه‌ی $\frac{R}{P}$ یک حوزه‌ی صحیح باشد.

اثبات. فرض کنیم P یک ایدآل اوّل باشد و $\frac{R}{P}$ حوزه‌ی صحیح نباشد. بنابراین عضوهایی ناصفر مانند $x+p$ و $y+P$ متعلق به $\frac{R}{P}$ وجود دارند به‌طوری‌که $(x+P)(y+P) = \circ_{\frac{R}{P}} = P$ و لذا xy متعلق به P می‌باشد. از طرفی می‌دانیم که P یک ایدآل اوّل است، پس x متعلق به P یا y متعلق به P است. در نتیجه یا $x + P = \circ_{\frac{R}{P}}$ و یا $y + P = \circ_{\frac{R}{P}}$ و این یک تناقض است چون فرض کردیم $x + P \neq \circ$ و $y + P \neq \circ$.

برعکس، فرض کنیم $\frac{R}{P}$ یک حوزه‌ی صحیح باشد امّا P اوّل نباشد. بنابراین عضو های x و y متعلق به $R \backslash P$ وجود دارند به‌طوری‌که xy یک عضو از P می‌باشد. در نتیجه $ab + P = (a+P)(b+P) = \circ_{\frac{R}{P}}$ و

چون $\frac{R}{P}$ یک حوزه‌ی صحیح است، پس $x+p=\circ_{\frac{R}{P}}$ یا $y+P=\circ_{\frac{R}{P}}$. لذا یا x متعلق به P است یا y.
این یک تناقض است. ■

گزاره ۵۳.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی متناهی باشد. در این صورت هر ایدآل اوّل R یک ایدآل ماکسیمال است.

اثبات. فرض کنیم P یک ایدآل اوّل از حلقه‌ی R باشد. در این صورت طبق قضیه‌ی ۵۲.۱، $\frac{R}{P}$ یک حوزه‌ی صحیح متناهی می‌باشد. با توجه به گزاره‌ی ۳۸.۱، $\frac{R}{P}$ میدان است. طبق قضیه‌ی ۴۲.۱، P یک ایدآل ماکسیمال از R می‌باشد. ■

تعریف ۵۴.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت $\dim(R)=\circ$ هرگاه هر ایدآل اوّل از حلقه‌ی R یک ایدآل ماکسیمال باشد.

قضیه ۵۵.۱ (قضیه‌ی اجتناب از ایدآل اوّل) فرض کنید به ازای عدد صحیح $n\geq ۲$، $P_۱$، $P_۲$، $\cdots$ و P_n ایدآل‌هایی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشند و حداکثر دو تا از آن‌ها اوّل نباشند. همچنین فرض کنید S زیرگروهی از گروه جمعی R باشد که نسبت‌به ضرب بسته است به‌طوری‌که

$$S\subseteq\bigcup_{i=۱}^{n}P_j$$

در این صورت به ازای عدد صحیح n $۱\leq j\leq$، $S\subseteq P_j$.

اثبات. مراجعه شود به قضیه‌ی ۶۱.۳ از مرجع [۱۵]. ■

تعریف ۵۶.۱ فرض کنید R یک حلقه و I ایدآلی از آن باشد. در این صورت

$$\sqrt{I}=\{x\in R\mid \exists n\in\mathbb{N}\quad s.t\quad x^n\in I\}$$

$$nil(R)=\sqrt{\circ}=\{x\in R\mid \exists n\in\mathbb{N}\quad s.t\quad x^n=\circ\}$$

تعریف ۵۷.۱ ایدآل سره‌ی Q از حلقه‌ی R یک ایدآل اوّلیه نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو عضو a و b از حلقه‌ی R، اگر ab عضوی از Q باشد، آن‌گاه a متعلق به Q یا b متعلق به $\sqrt{Q}$ باشد.

تعریف ۵۸.۱ فرض کنید R و R' دو حلقه و $f: R \longrightarrow R'$ یک تابع باشد. در این صورت f را یک هم‌ریختی نامند هرگاه به ازای هر a و b متعلق به R،

۱. $f(a+b) = f(a) + f(b)$،

۲. $f(ab) = f(a)f(b)$.

هم‌ریختی f را یک‌ریختی نامند هر گاه f یک‌به‌یک و پوشا باشد.

تعریف ۵۹.۱ دو حلقه‌ی R و R' را یک‌ریخت نامند هرگاه یک یک‌ریختی مانند $f: R \longrightarrow R'$ موجود باشد. زمانی‌که R و R' یک‌ریخت باشند، می‌نویسیم $R \cong R'$.

قضیه ۶۰.۱ (قضیه‌ی اوّل یک‌ریختی) فرض کنید R و S دو حلقه و $f: R \longrightarrow S$ یک هم‌ریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت $\frac{R}{\ker(f)} \cong \mathrm{Im}(f)$.

اثبات. مراجعه شود به قضیه‌ی ۱۴.۳.۱۱ از مرجع [۶]. ■

تعریف ۶۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و a یک عضو از R باشد. در این صورت ایدآل پوچ‌ساز چپ a در R را با $\mathrm{ann}_l(a)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند.

$$ann_l(a) = \{r \in R \mid ra = 0\}.$$

همچنین ایدآل پوچ‌ساز راست a در R را با $\mathrm{ann}_r(a)$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند.

$$ann_r(a) = \{r \in R \mid ar = 0\}.$$

اگر حلقه‌ی R تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$ann_l(a) = ann_r(a) = ann(a).$$