وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عنوان :

کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایده‌آل

استاد راهنما :

دکتر جعفر امجدی

استاد مشاور :

دکتر رضا نقی‌پور

پژوهشگر :

پیمان ذاکرطباطبایی

شهریور ۱۳۸۸

تبریز – ایران

بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

این مجموعه را به پدر و مادرم تقدیم می‌کنم

قدردانی

اکنون که به شکرانه‌ی الهی و در سایه ایزد منان، این پایان‌نامه به اتمام رسیده است، بر خود وظیفه می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که راهگشای این تحقیق بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

از استاد محترم جناب آقای دکتر جعفر امجدی که به عنوان استاد راهنما بسیار بیشتر از آن‌چه که می‌باید به بنده لطف داشته‌اند نهایت تشکر و قدردانی را دارم.
از استاد مشاور جناب آقای دکتر رضا نقی‌پور که مرا در انجام این پایان‌نامه همراهی کردند تشکر می‌کنم.

و در نهایت قدردانی خود را از سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیل افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام و خانواده‌ی عزیزم، به خصوص پدر و مادر گرامی که یاور و مشوق همیشگی من در زندگی و دوران تحصیلاتم بوده‌اند، ابراز می‌دارم.

پیمان ذاکرطباطبایی

چکیده

فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی، یکدار و نوتری باشد. نیز فرض کنید M یک R - مدول و I, J دو ایده‌آل در R باشند. در این رساله، با معرفی زیرمجموعه‌ی $W(I, J)$ از $Spec(R)$ تعمیمی از کوهمولوژی موضعی را ارائه می‌دهیم که آن را کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایده‌آل (I,J) خوانده و با نماد $H^i_{I,J}(M)$ نمایش می‌دهیم. پس از بررسی خواص اساسی فانکتور $H^i_{I,J}(-)$ و مجموعه‌ی $W(I, J)$، با معرفی همبافت چک تعمیم‌یافته نشان می‌دهیم که مدولهای $H^i_{I,J}(M)$ را می‌توان به شکل مدولهای کوهمولوژی همبافت چِک تعمیم‌یافته محاسبه کرد. سپس تعمیمی از قضایای صفرشدن گروتندیک و لیختن‌بوم—هارتشورن را ارائه داده و در انتها، به تعمیم قضیه‌ی دوگان موضعی خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: کوهمولوژی موضعی، بُعد کرول، همبافت چِک، حلقه‌ی کوهن—مکالی، دوگان ماتلیس.

پیشگفتار

«هنگامی که مجابم کرد

نهالی خرد بود در معرضی بی‌آفتاب

کنونش درختی می‌بینم

برَبالیده و گسترده شاخسار

که سایه‌اش به فتح زمین سوزان می‌رود...»[1]

الکساندر گروتندیک در سال ۱۹۶۰، در پاسخ به حدسی از پیر ساموئل پیرامون U.F.D ها و هم‌چنین برای اثبات قضایایی از نوع لِفشتز در هندسه‌ی جبری، کوهمولوژی موضعی را ابداع نمود که امروزه، ارتباط وسیع با توپولوژی، هندسه، ترکیبیات و دیگر شاخه‌های ریاضیات، کوهمولوژی موضعی را به صورت یک زمینه‌ی تحقیقاتی فعّال درآورده است. از منظر هندسی، کوهمولوژی موضعی همان کوهمولوژی بافه‌ها با محمل بر روی یک مجموعه‌ی بسته است.

یکی از شیوه‌های معمول پژوهش، تعمیم مسأله از یک حالت به حالت‌های کلی‌تر است. در سال ۱۹۷۰، هِرزُگ[2] با ارائه‌ی مقاله‌ی [۱۰] کوهمولوژی موضعی را برای دو مدول تعمیم داد و پایان‌نامه‌ی

[1] ا.بامداد

[2] Herzog

حاضر بیان تفصیلی بخشی از مقاله‌ی [۱] می‌باشد که کوهمولوژی موضعی یک مدول نسبت به دو ایده‌آل را مورد مطالعه قرار داده است که به زبان هندسی، این تعمیم با محمل بر روی یک مجموعه‌ی نه لزوماً بسته صورت می‌پذیرد. تعریف زیرمدول $\Gamma_{I,J}(M)$ از R - مدول M سرآغاز این تعمیم است که در بخش اول از فصل دوم به تعاریف، لم‌ها و قضایای مربوط به آن پرداخته‌ایم.

همبافت‌های چِک، رهیافت دیگری برای محاسبه‌ی مدولهای کوهمولوژی موضعی یک مدول هستند که در بخش دوم از فصل دوم با ارائه‌ی تعمیمی از آن محاسبه‌ی مدولهای کوهمولوژی موضعی با محمل غیربسته را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ارتباط این تعمیم با کوهمولوژی موضعی معمولی و تعمیم قضایای مشهور صفرشدن گروتندیک و صفرشدن لیختن‌بوم—هارتشورن، مباحثی هستند که در فصل سوم به طور مفصل مورد بحث قرار گرفته‌اند. قضیه‌ی دوگان موضعی امکان تبدیل پرسش‌های مربوط به مدولهای کوهمولوژی موضعی را به سؤالات مشابه درباره‌ی مدولهای Ext فراهم می‌آورد که تعمیم این قضیه، رسالت ما در فصل چهارم است.

در انتها، باید خاطرنشان کرد که تمام حلقه‌های به کار رفته در این پایان‌نامه، جابه‌جایی، یکدار و نوتری می‌باشند.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ سیری کوتاه در جبر جابه‌جایی

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول[۱] حلقه‌ی R را با نماد $Spec(R)$ نشان داده و آن را **طیف اول**[۲] حلقه‌ی R می‌نامیم. نیز مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های ماکزیمال حلقه‌ی R را با نماد $Max(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید $\mathfrak{a}$، یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد. مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را که شامل ایده‌آل $\mathfrak{a}$ هستند **واریته‌ی** [۳] ایده‌آل $\mathfrak{a}$ نامیده و با نماد $V(\mathfrak{a})$ نمایش می‌دهیم؛ به عبارت دیگر $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$.

---

[۱] Prime Ideals

[۲] Prime Spectrum

[۳] Variety

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید $\mathfrak{a} \trianglelefteq R$. در این‌صورت، بنا بر (۳.۵۲؛[۲۳])، $V(\mathfrak{a})$ دارای عضو مینیمال نسبت به رابطه‌ی شمول است. عضو مینیمال $V(\mathfrak{a})$ را **ایده‌آل اول مینیمال** $\mathfrak{a}$ خوانده و مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال $\mathfrak{a}$ را با نماد $Min(\mathfrak{a})$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت،

(i) $V(\circ) = Spec(R), V((\text{۱})) = \emptyset$،

(ii) اگر $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از ایده‌آلهای R باشد، آن‌گاه

$$V(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

(iii) اگر $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ دو ایده‌آل از حلقه‌ی R باشند، آن‌گاه

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

برهان. رجوع شود به [صفحه‌ی ۲۵؛[۱۵]]. ■

تعریف ۴.۱.۱ با توجه به‌گزاره‌ی ۱.۱.۱، $V(\mathfrak{a})$ها در نقش مجموعه‌های بسته‌ی یک فضای توپولوژی ظاهر می‌شوند که این توپولوژی حاصل بر روی $Spec(R)$ را توپولوژی **زاریسکی**[۱] می‌نامیم. $D(\mathfrak{a}) := Spec(R) - V(\mathfrak{a})$ مجموعه‌های باز این فضای توپولوژی را توصیف می‌کنند.

گزاره ۲.۱.۱ فرض کنید M یک R - مدول متناهی‌مولد و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد که $M = \mathfrak{a}M$. در این‌صورت، $x \in \mathfrak{a}$ چنان وجود دارد که $(\text{۱} - x)M = \circ$.

[۱] Zariski

برهان. به [[۲];۵.۲] مراجعه شود. ■

گزاره ۳.۱.۱ (**لم ناکایاما**[1]) فرض کنید M یک R - مدول متناهی‌مولد و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد که $\mathfrak{a} \subseteq J(R)$ و $M = \mathfrak{a}M$. در این‌صورت $M = 0$.

برهان. به [[۲];۶.۲] مراجعه شود. ■

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول و $\mathfrak{p} \in Spec(R)$. $\mathfrak{p}$ را **ایده‌آل اول وابسته**[2]ی M می‌نامیم هرگاه عضو غیرصفری مانند m در M موجود باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{p} = (0 :_R m)$. مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی M را با نماد $Ass_R(M)$ و یا هرگاه ابهامی در مورد حلقه‌ی R نباشد با $Ass(M)$ نشان می‌دهیم. اگر $\mathfrak{a} \trianglelefteq R$، مجموعه‌ی $Ass_R(R/\mathfrak{a})$ را با علامت $ass_R(\mathfrak{a})$ نیز نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. مجموعه‌ی $\{\mathfrak{p} \in Spec(R) : M_\mathfrak{p} \neq 0\}$ را **محمل**[3] M نامیده و آن را با نماد $Supp_R(M)$ و یا $Supp(M)$ نشان می‌دهیم که منظور از $M_\mathfrak{p}$، مدول حاصل از موضعی‌سازی M نسبت به ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ است.

---

[1] Nakayama's lemma
[2] Associated Prime Ideal
[3] Support

تعریف ۷.۱.۱ بُعد کرول[1] حلقه‌ی R برابر است با سوپریمم طول زنجیرهای ساخته شده از ایده‌آل‌های اول واقع در $Spec(R)$، مشروط بر اینکه چنین عددی موجود باشد. و در غیر این‌صورت، آن را ∞ تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر

$dim(R) := sup\{n \in \mathbb{N}_0$: زنجیری به طول n از ایده‌آل‌های اول R وجود داشته باشد $\}$

تعریف ۸.۱.۱ بُعد کرول $R-$ مدول M، برابر است با سوپریمم طول زنجیرهای ساخته شده با ایده‌آل‌های اول واقع در $Supp(M)$ (در صورت وجود)، و اگر چنین سوپریممی موجود نباشد، آن را ∞ تعریف می‌کنیم. همچنین اگر $M = 0$، بُعد کرول آن را -1 تعریف می‌کنیم.

لم ۱.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول متناهی‌مولد باشد. دراین صورت

$$Supp(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : (0 :_R M) \subseteq \mathfrak{p}\} = V(Ann_R(M)).$$

برهان. رجوع شود به [۹.۲۰؛[۲۳]]. ■

لم ۲.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(i) $M = 0$،

(ii) به ازای هر $\mathfrak{p} \in Spec(R)$، $M_{\mathfrak{p}} = 0$،

(iii) به ازای هر $\mathfrak{m} \in Max(R)$، $M_{\mathfrak{m}} = 0$.

برهان. رجوع شود به [۹.۱۵؛[۲۳]]. ■

---

[1] Krull Dimension

تعریف ۹.۱.۱ زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی R را **بسته‌ی ضربی**[۱] گوئیم هرگاه

(i) $1_R \in S$،

(ii) به ازای هر دو عضو $x, y \in S$، $xy \in S$.

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنید که S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R و M یک $S^{-1}R$ − مدول باشد. در این‌صورت، $Ass_R(M) = Ass_{S^{-1}R}(M)$.

برهان. رجوع شود به [۱.۶؛[۱۵]]. ■

نتیجه ۱.۱.۱ فرض کنید M یک R − مدول و $\mathfrak{p} \in Spec(R)$. دراین صورت،

$$\mathfrak{p} \in Ass_R(M) \Leftrightarrow \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in Ass_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}).$$

برهان. رجوع شود به[۲.۶؛[۱۵]]. ■

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنید $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ یک دنباله‌ی دقیق از R − مدول‌ها و R − همریختی‌ها باشد. در این صورت

$$Ass(M) \subseteq Ass(M') \cup Ass(M'').$$

برهان. رجوع شود به [۳.۶؛[۱۵]]. ■

[۱] Multiplicativly closed

قضیه ۳.۱.۱ فرض کنید M یک R — مدول غیرصفر متناهی‌مولد باشد. دراین صورت، زنجیری به شکل $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ از زیرمدولهای M موجود است به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$، که در آن $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$.

برهان. رجوع شود به [[۱۵]؛۴.۶]. ■

قضیه ۴.۱.۱ فرض کنید M، یک R — مدول باشد. دراین صورت

(i) $Ass(M)$ یک مجموعه‌ی متناهی است.

(ii) $Ass(M) \subseteq Supp(M)$.

(iii) $Ass(M)$ و $Supp(M)$ دارای اعضای می‌نیمال یکسانی هستند.

برهان. رجوع شود به [[۱۵]؛۵.۶]. ■

نمادگذاری ۱.۱.۱ مجموعه‌ی اعضای می‌نیمال $Ass(M)$ را با نماد $Min(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵.۱.۱ فرض کنید $0 \longrightarrow M'' \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ دنباله‌ای دقیق از R — مدول‌ها و R — همریختی‌ها باشد. دراین صورت $Supp(M) = Supp(M') \cup Supp(M'')$.

برهان. حکم به راحتی از دقیق بودن دنباله‌ی $0 \longrightarrow M''_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$ حاصل می‌گردد، که در آن $\mathfrak{p} \in Supp(M)$. ■

لم ۳.۱.۱ فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. دراین صورت

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$$

برهان. به [۴۸.۳؛[۲۳]] مراجعه شود. ■

لم ۴.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت، $n \in \mathbb{N}$ چنان وجود دارد که $(\sqrt{I})^n \subseteq I$. به عبارت دیگر، هر ایده‌آل شامل توانی از رادیکال خود می‌باشد.

برهان. به [۲۱.۸؛[۲۳]] مراجعه شود. ■

لم ۵.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. دراین صورت، به ازای هر $\mathfrak{p} \in Ass(M)$، M زیرمدولی یکریخت با $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ دارد.

برهان. رجوع شود به [۲۴.۷؛[۲۳]]. ■

قضیه ۶.۱.۱ فرض کنید M، یک $R-$ مدول و R حلقه‌ی نوتری باشد. دراین صورت

$$ZD_R(M) = \bigcup_{\mathfrak{p}\in Ass(M)} \mathfrak{p}.$$

برهان. رجوع شود به [۳۶.۹؛[۲۳]]. ■

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. دراین صورت، زنجیر

$$0 = M_0 \subset \cdots \subset M_n = M$$

از زیرمدول‌های M را **اشباع شده** می‌نامند هرگاه به ازای هر $0 \leq i \leq n$، $R-$ مدول $\frac{M_i}{M_{i-1}}$ ساده باشد. n را طول زنجیر اشباع شده‌ی فوق می‌نامند و ثابت می‌شود(**قضیه‌ی جردن—هولدر**[1]) که همه‌ی زنجیرهای اشباع شده‌ی یک مدول دارای طول‌های یکسانند، این طول مشترک را **طول**[2] **مدول** M نامیده و با نماد $\ell_R(M)$ و یا در صورتی که ابهامی در مورد حلقه‌ی R نباشد با نماد $\ell(M)$ نشان می‌دهیم. هرگاه M دارای چنین زنجیری باشد گوییم M **از طول متناهی** است و به صورت $\ell_R(M) < \infty$ نشان می‌دهیم. اگر M دارای چنین زنجیری نباشد گوییم M **از طول متناهی نیست** و می‌نویسیم $\ell_R(M) = \infty$.

قضیه ۷.۱.۱ فرض کنید M، یک $R-$ مدول باشد. در این‌صورت، M از طول متناهی است اگر و تنها اگر نوتری و آرتینی باشد.

برهان. رجوع شود به [۳٦.۷؛[۲۳]]. ■

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. $R-$ مدول E را **پوشش انژکتیو**[3] برای M می‌خوانیم هرگاه

(i) E به‌عنوان $R-$ مدول انژکتیو باشد،

(ii) $M \subseteq E$،

---

[1] $Jordan - Holder$

[2] Length

[3] Injective Hull

(iii) به ازای هر زیرمدول غیرصفر از مدول E، مانند K، $K \cap M \neq 0$.

پوشش انژکتیو M را با نماد $E_R(M)$ و یا $E(M)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر ۱.۱.۱ بنا به (۳۱.۳؛ [۲۱])، پوشش انژکتیو تا حد یکریختی منحصربفرد است و نیز اگر M انژکتیو باشد، آنگاه $E(M) = M$.

لم ۶.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری، $S \subseteq R$ یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی، و M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت، $S^{-1}E_R(M) \cong E_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$.

برهان. رجوع شود به [۵.۲.۳؛[۵]]. ■

لم ۷.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری، $\mathfrak{p} \in Spec(R)$، و M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت، $Ass(M) = Ass(E(M))$؛ به ویژه $Ass(E(R/\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{p}\}$.

برهان. رجوع شود به [۷.۲.۳؛[۵]]. ■

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول ناصفر متناهی‌مولد و $a_1, \ldots, a_n \in R$. گوییم عناصر $a_1, \ldots, a_n$ یک $M-$ **رشته‌ی منظم**[1] **به‌طول** n تشکیل می‌دهد هرگاه

(i) $M \neq < a_1, \ldots, a_n > M$،

(ii) به ازای هر $i = 1, \cdots, n$، عنصر a_i مقسوم علیه صفر[2] $R-$ مدول $M/ < a_1, \ldots, a_{i-1} > M$

[1] Regular Sequence

[2] Zero Divisor

نباشد؛ به عبارت دیگر $a_i \notin ZD_R(M/ < a_1, \ldots, a_{i-1} > M)$. گاهی این رشته را با نماد $(a_i)_1^n$ نیز نشان می‌دهند.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید M یک R − مدول و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد. M − رشته $(a_i)_1^n$ در ایده‌آل $\mathfrak{a}$ را یک M − رشته‌ی **ماکزیمال** می‌نامیم هرگاه، عضو a_{n+1} از $\mathfrak{a}$ چنان موجود نباشد که $(a_i)_1^{n+1}$ نیز یک M − رشته در ایده‌آل $\mathfrak{a}$ باشد.

تذکر ۲.۱.۱ بنا به (۱۳.۱٦؛[۲۳])، تمام M − رشته‌های ماکزیمال واقع در یک ایده‌آل دارای طول یکسان هستند.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنید M یک R − مدول و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد. در این‌صورت، طول مشترک تمام M − رشته‌های ماکزیمال واقع در $\mathfrak{a}$ را **درجه‌ی**[1] $\mathfrak{a}$ **روی** M نامیده و با نماد $grade_M\mathfrak{a}$ و یا $grade(\mathfrak{a}, M)$ نشان می‌دهیم. در حالت خاص، اگر $M = R$، آنگاه درجه‌ی $\mathfrak{a}$ روی R را با نماد $grade\ \mathfrak{a}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$، یک حلقه‌ی موضعی نوتری و M یک R − مدول باشد. در این‌صورت، درجه‌ی تنها ایده‌آل ماکزیمال $\mathfrak{m}$ روی M را **عمق**[2] مدول M روی R نامیده و با نماد $depth_R M$ نشان می‌دهیم.

---
[1] grade
[2] depth

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$، یک حلقه‌ی موضعی نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی‌مولد ناصفر باشد. دراین‌صورت $depth_R\, M \leq dim\, M$.

برهان. رجوع شود به [[۵]؛۱۲.۲.۱]. ■

قضیه ۹.۱.۱ فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$، یک حلقه‌ی موضعی نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی‌مولد ناصفر باشد و $\mathfrak{p} \in Ass_R(M)$. دراین‌صورت $depth\, M \leq dim\, R/\mathfrak{p}$.

برهان. رجوع شود به [[۵]؛۱۳.۲.۱]. ■

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آل دلخواهی از حلقه‌ی R باشد، در این‌صورت $grade\, \mathfrak{a} \leq ht\, \mathfrak{a}$.

برهان. رجوع شود به [[۵]؛۱۴.۲.۱]. ■

قضیه ۱۱.۱.۱ **(تعمیم قضیه‌ی ایده‌آل اصلی کرول)** فرض کنید $\mathfrak{a}$، یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد که توسط n عضو تولید شده است. در این‌صورت، به ازای هر $\mathfrak{p} \in Min(\mathfrak{a})$، $ht\, \mathfrak{p} \leq n$.

برهان. رجوع شود به [[۲۳]؛۴.۱۵]. ■

لم ۸.۱.۱ فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه‌ی نوتری R و $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ چنان باشد که $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ و $ht\, \mathfrak{a} = ht\, \mathfrak{p}$. در این‌صورت $\mathfrak{p} \in Min(\mathfrak{a})$.