دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

کاربردی از قضیه نمایش ریس برای حل رده ای از مسائل کنترل بهینه

نگارش
محمد مهدی شعبانی

استاد راهنما
دکتر کامران شریفی دکتر علیرضا ناظمی

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه قصد داریم با استفاده از نظریهٔ اندازه یک مسأله کنترل بهینه کلاسیک را به فضای اندازه منتقل نموده و جواب مسأله را در این فضا بدست آوریم، با توجه به خواصی که مسأله در این فضا بدست می آورد رسیدن به جواب بهینه را برای ما آسان می نماید.
روش کار بدین نحو است که بین تمام زوج های قابل قبول در فضای کنترل کلاسیک و فضای تابعی ها با تعریف یک نگاشت تناظری یک به یک برقرار می کنیم و در مرحله بعد با استفاده از قضیه نمایش ریس یک تناظر دو سویی بین فضای تابعی ها و فضای اندازه بوجود خواهد آمد. در پایان هم نشان خواهیم داد اندازه بهینه بدست آمده در فضای اندازه متناظر زوج قابل قبول بهینه ای است که تابع هدف (معیار) را در مسأله کنترل کلاسیک مینیموم (ماکسیموم) می سازد.

واژه‌های کلیدی: کنترل بهینه ، برنامه ریزی خطی ، فضای اندازه ،قضیه نمایش ریس

پیشگفتار

در بیشتر شاخه های ریاضیات، هدف تجزیه و تحلیل وضعیت یک دستگاه دینامیکی است. در دویست سال اخیر، شاخه های مختلف ریاضیات کاربردی (کلاسیک) از جمله نظریه مکانیک (ذرات، مایعات و جامدات)، الکترومغناطیس، ترمودینامیک و غیره پیشرفت های زیادی داشته اند، لکن حل بسیاری از مسائل مهم جهان محتاج راه حلی متفاوت با راه حل مسائل فوق می باشد. در این نوع از مسائل هدف آن است یک سیستم دینامیکی را طوری کنترل کنیم که بطریقی مطلوب رفتار و عمل نماید.

در بسیاری از مسائل با روش های کلاسیک نمی توان جواب دقیقی برای آن پیدا نمود. به همین دلیل روش های عددی می تواند تا حد زیادی در رفع این مشکل مفید باشد. روش نظریه اندازه بعنوان رده ای از روش های عددی چندی است که مورد توجه بسیاری از محققین و پژوهشگران علوم کاربردی قرار گرفته است. به همین دلیل، در این رساله سعی کرده ایم مروری بر روش نظریه اندازه داشته و با استفاده از این روش به حل رده ای از مسائل کنترل بهینه غیر خطی بپردازیم. در فصل اول به بیان مقدمه ای بر نظریه اندازه، تاریخچه ای از نظریه کنترل بهینه و شکل کلی مسائل کنترل بهینه می پردازیم. در فصل دوم به بیان تعاریف و قضایای مورد استفاده در نظریه اندازه می پردازیم. در فصل سوم به چگونگی انتقال مسأله کنترل بهینه کلاسیک به فضای اندازه مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در فصل چهارم به بحث در مورد فرم جواب در فضای اندازه خواهیم پرداخت و در پایان با بیان چند مثال عددی کارآیی روش ارائه شده مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه ای بر نظریه کنترل

در نظریه کنترل نشان داده شده است که رفتار دینامیکی بسیاری از سیستم ها را می توان بشکل معادلات یا نامعادلات ریاضی بخصوص بشکل معادلات دیفرانسیل بیان نمود . البته ساختن یک مدل ریاضی برای یک سیستم ممکن است بسیار پیچیده باشد و این بحث در جای خود از اهمیت زیادی بر خوردار است. ما فرض خواهیم کرد که کسی معادلات ریاضی سیستم را که خواص مکانیکی سیستم مورد بررسی را مشخص می کند تهیه کرده باشد.

بنابراین برای کنترل یک سیستم لازم است کنترل ها مناسب انتخاب شوند، چنانکه معادلات ریاضی مربوط به آن سیستم برآورده شوند. البته محاسبه جواب های معادلات بخصوص معادلات دیفرانسیل غیر خطی عموما خیلی پیچیده است.

در نظریه کنترل کلاسیک بر اساس روش های تبدیل لاپلاس جواب های بسیاری از معادلات دیفرانسیل بدست می آید. اما حتی با این روش هم مشکلات و محدودیت ها بیشمار است. علاوه بر این امروزه صرفه جویی در زمان، سوخت، انرژی یا سرمایه گذاری اقتصادی و غیره نیز در یک سیستم کنترل پذیر ضرورت پیدا نموده است. بنابراین مساله کنترل سیستم به بهترین صورت مورد بررسی قرار می گیرد.

به عنوان مثال ما می خواهیم مساله مینیموم کردن مصرف سوخت راکت را مورد بررسی قرار دهیم. معادله حاکم بر حرکت راکت عبارت است از:

$$m\frac{dV}{dt} = mF + F_{ext}$$

که در آن m جرم راکت، F نیروی پرتاب که بوسیله راکت تولید می شود وF_{ext} برآیند نیروهای خارجی ای است که از محیط به راکت وارد می شود، همچنین داریم:[۱]

$$|F| = \frac{c}{m}\beta$$

که در آن c سرعت نسبی اگزوز و $\beta = -\frac{dm}{dt}$ ، نرخ مصرف سوخت است، اگر φ زاویه واقعی پرتاب (زاویه بین محور راکت و افق) باشد، آنگاه معادلات حرکت عبارتند از:

$$\frac{dv_۱}{dt} = \frac{c\beta}{m}\cos\varphi$$

$$\frac{dv_۲}{dt} = \frac{c\beta}{m}\sin\varphi - mg$$

که در آن $V = [v_۱, v_۲]^T$ و $F_{ext} = [۰, -mg]^T$ اختیار شده است. مساله مصرف مینیموم سوخت عبارت است از انتخاب کنترل های β وφ که راکت را از نقطه اولیه به ارتفاع مورد نظر، $\overline{y}$ ، برساند به قسمی که مقدار سوخت مصرفی مینیموم شود. سوخت مصرف شده عبارت است از:

$$I = \int_۰^T \beta dt$$

که در آن T زمان رسیدن به $\overline{y}$ است.

۲.۱ تاریچه نظریه اندازه

در حل مسائل کنترل بهینه سیستم های فشرده[۱] ، روبیو[۲] [۲] از نظریه اندازه استفاده کرد و کنترل بهینه ای بصورت قطعه ای ثابت برای سیستم بدست آورد. ویلسون [۳] و روبیو در وجود کنترل های بهینه برای سیستم های تحت معادله حرارت یک بعدی از نظریه اندازه استفاده کردند، همچنین آنها در سال ۱۹۹۱ میلادی حل مسائل کنترل بهینه سیستم های تحت معادله حرارت در حالت n بعدی را با همین روش بررسی کرده اند.

در سال ۱۹۹۲، کامیاد، روبیو و ویلسون [۴۱] نظریه اندازه را تحت معادله حرارت با یک کنترل بهینه توسیعی بکار بردند.کامیاد در سال ۱۹۹۲ در مسأله کنترل پذیری قوی از نظریه اندازه استفاده نموده است.

در سالهای اخیر روش نظریه اندازه برای حل معادلات دیفرانسیل های معمولی و پاره ای[۴۳], حل مسائل برنامه ریزی غیرخطی[۴۵], حل دستگاه های غیر خطی[۴۲]، حل معادلات انتگرال[۴۴]، مسائل کنترل بهینه زمانی [۴۶] و مسائل طراحی شکل بهینه [۴۷] استفاده شده است. همچنین با انجام تغییراتی در این نظریه، مسائل کنترل بهینه در افق نامتناهی، مسائل کنترل بهینه در حالت گسسته، توسیع نظریه اندازه به حالت های چند اندازه ای و ... حل شده است. به نظر می رسد اگر بتوان هر مسأله ای که در شاخه های مختلف ریاضی مطرح می شود را به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال تبدیل نمود، در حل آن می توان از این نظریه استفاده نمود.

[۱] Lumped system
[۲] Rubio
[۳] Wilson

۳.۱ شکل کلی مساله کنترل بهینه

در اینجا شکل کلی از یک مساله کنترل بهینه معرفی می کنیم که در فصول بعدی با استفاده از نظریه اندازه به حل آن می پردازیم.

فرض کنید سیستم دینامیکی توسط n متغیر وضعیت x_1، x_2،...،x_n مشخص می شود اکنون بردار وضعیت x را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

مولفه های x را می توان به عنوان محور های مختصات یک فضایn بعدی بنام فضای وضعیت [۴] در نظر گرفت.

بردار کنترل u را بهٔ صورت برداری از m متغیر کنترل u_1، u_2،...،u_m بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_m \end{bmatrix}$$

فرض کنید (x, u) در یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بصورت زیر صدق می کند:

$$\begin{cases} \dot{x} = g(t, x, u) & t_a \leq t \leq t_b \\ x(t_a) = x_a & x(t_b) = x_b \end{cases} \qquad (۱.۱)$$

که در آن g یک بردار با مولفه های g_1،g_2،...،g_n است، $x(t_a)$ وضعیت اولیه و $x(t_b)$ وضعیت نهایی هستند.

[۴] state space

مسأله کنترل بهینه عبارت است از پیدا کردن $(x,u)^T$ که در ۱.۱ صدق کرده و تابعی زیر را ماکسیموم یا مینیموم کند:

$$I = \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t))dt \tag{۲.۱}$$

در اینجا f_0 و g_i، $(i = 1, 2, ..., n)$ توابعی پیوسته از t و x و u هستند.

برای حل مساله کنترل بهینه به شکل فوق از نظریه اندازه استفاده می کنیم ودر نهایت یک کنترل قطعه ای ثابت بدست می آوریم برای این منظور نیاز به مقدماتی از توپولوژی، آنالیز حقیقی، آنالیز تابعی، آنالیز عددی و برنامه ریزی خطی داریم، که در فصل بعد خلاصه ای از این مفاهیم را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فصل ۲

مفاهیم اساسی در توپولوژی و آنالیز

۱.۲ مقدمه

نظریه اندازه [1] از زیبا ترین شاخه های ریاضیات است که در بسیاری از مسائل راهگشا می باشد. در این رساله قصد داریم کاربردی از نظریه اندازه در حل مسائل کنترل بهینه [2] را نشان دهیم. به همین منظور لازم است مساله کنترل بهینه را به فضای اندازه [3] و در این فضا به تعریف یک توپولوژی [4] مناسب می پردازیم. همچنین آشنایی با بسیاری از قضایای مهم آنالیز ریاضی که از آن جمله مطالبی درباره تابعی ها ، انتگرال و اندازه و همچنین تعاریف و قضایایی در مورد فضاها و مجموعه ها ضرورت دارد. لذا این فصل را منحصراً وبه طور خلاصه به تعاریف و صورت قضایایی اختصاص می دهیم که در این رساله نقش اساسی دارند.

۲.۲ تعاریف و مقدمات توپولوژی و آنالیز

تعریف ۱.۲.۲. فضای توپولوژیکی (X,τ) تشکیل شده از یک مجموعه ناتهی X همراه با یک گردایه τ از زیر مجموعه های X که در سه شرط زیر صدق می کنند:

الف) $X \in \tau$ و $\phi \in \tau$.

[1] Measure theory
[2] optimal control problam
[3] Measure spase
[4] Topology

ب) اگر $O_1 \in \tau$ و $O_2 \in \tau$ آنگاه $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

ج)اگر $\{O_\alpha : \alpha \in I\}$ یک خانواده از اعضای τ باشد آنگاه $\cup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \tau$.

گردایه τ یک توپولوژی روی مجموعه X می باشد و هر عضو τ یک مجموعه باز [۵] نامیده می شود. اعضای مجموعه X را نقاط X می گوئیم و اگر $x \in X$ هر مجموعه باز شامل x را یک همسایگی از x می نامیم.

تعریف ۲.۲.۲. مجموعه $C \subset X$ را بسته [۶] گویند هر گاه $C^c \subset X$ باز باشد که در آن C^c متمم [۷] مجموعه C در X است.

قضیه ۳.۲.۲. [۶] مجموعه های X و ϕ بسته هستند و اجتماع دو مجموعه بسته ، بسته و اشتراک هر گردایه از مجموعه های بسته نیز بسته است.

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنید $A \subset X$ ، نقطه $x \in A$ را درونی [۸] گوئیم هرگاه یک همسایگی از x مانند O موجود باشد که $O \subseteq A$. مجموعه نقاط درونی A را با A^o نشان می دهیم.

تعریف ۵.۲.۲. نقطه p یک نقطهٔ حدی مجموعه E است هرگاه هر همسایگی p شامل نقطه ای چون $q \in E$ غیر از p باشد.

تعریف ۶.۲.۲. هر گاه X یک فضای متری بوده و $E \subset X$ و E' مجموعهٔ تمام نقاط حدی E در X باشد ، آنگاه بست E عبارت است از مجموعه $\bar{E} = E \cup E'$.

تعریف ۷.۲.۲. مجموعه $E \subseteq X$ در X چگال است هر گاه:$\bar{E} = X$.

تعریف ۸.۲.۲. منظور از یک پوشش باز مجموعه E در فضای متری X یعنی گردایه ای از زیر مجموعه های باز X مانند $\{G_\alpha\}$ که $E \subset \cup_\alpha G_\alpha$.

[۵] Open set
[۶] Closed set
[۷] Complement
[۸] Interior point

تعریف ۹.۲.۲. زیر مجموعه E از فضای توپولوژیکی X فشرده است هر گاه هر پوشش باز E حاوی زیر پوششی متناهی باشد. اگر هر نقطه $x \in X$ دارای یک همسایگی باشد که بستار آن فشرده باشد در این صورت X را موضعاً فشرده [۹] می گویند.

تعریف ۱۰.۲.۲. گوئیم ردهٔ $\{A_i : i \in I\}$ از مجموعه ها دارای خاصیت اشتراک متناهی است اگر هر زیر ردهٔ متناهی $\{A_{i1}, ..., A_{im}\}$ اشتراک ناتهی داشته باشد.

قضیه ۱۱.۲.۲. [۶] فضای توپولوژی X فشرده است اگر و تنها اگر هر ردهٔ $\{A_i : i \in I\}$ از مجموعه های بسته X که در خاصیت اشتراک متناهی صدق می کند خود دارای اشتراک ناتهی باشد.

تعریف ۱۲.۲.۲. فرض کنید (X, τ) و (Y, τ^*) فضاهایی توپولوژیکی باشند. تابع $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته نسبت به τ و τ^* است اگر و تنها اگر نقش معکوس هر زیر مجموعه τ^*-باز B از Y یک زیر مجموعه τ-باز از X باشد یعنی اگر $B \in \tau^*$ آنگاه $f^{-1}(B) \in \tau$.

تعریف ۱۳.۲.۲. فرض کنید (X, τ)یک فضای توپولوژیکی باشد. $\mathfrak{B} \subset \tau$یک پایه [۱۰] برای$\tau$ است اگر در دو شرط زیر صدق کند:

الف) هر مجموعه باز$G \in \tau$ اجتماعی از اعضای $\mathfrak{B}$باشد.

ب) به ازای هر p در مجموعه باز G،$B \in \mathfrak{B}$ موجود باشد که$p \in B \subset G$.

تعریف ۱۴.۲.۲. یک تابعی ، تابع ای از یک تابع می باشد. بعبارتی دیگر میدان تعریف یک تابعی دسته ای از توابع می باشد.

فرض کنید x تابع پیوسته ای از t بوده که در فاصله $[t_0, t_f]$ تعریف شده باشد و

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x(t)dt$$

[۹] Locally compact
[۱۰] Base

دراینصورت عدد نسبت داده شده توسط تابعی J ، سطح زیر منحنی $x(t)$ است.

تعریف ۱۵.۲.۲. تابع $f : X \to \mathbb{R}$ دارای محمل [۱۱] فشرده گویند اگر بستار مجموعه $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ فشرده باشد.

تعریف ۱۶.۲.۲. یک گردایه $\mathfrak{M}$ از زیر مجموعه های مجموعه ناتهی X یک جبر مجموعه ها نامیده می شود هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

الف) اگر $A, B \in \mathfrak{M}$ آنگاه $A \cap B \in \mathfrak{M}$.

ب) اگر $A \in \mathfrak{M}$ آنگاه $A^c \in \mathfrak{M}$.

تعریف ۱۷.۲.۲. جبر $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$جبر نامیده می شود هر گاه اجتماع هر گردایه شمارش پذیر از عناصر $\mathfrak{M}$ در $\mathfrak{M}$ باشند.

تعریف ۱۸.۲.۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد. گردایه $\mathfrak{B}$ از مجموعه برل [۱۲] کوچکترین $\sigma-$جبری است که شامل تمام مجموعه های بسته می باشد. همچنین می توان گفت $\mathfrak{B}$ کوچکترین $\sigma-$جبری است که شامل تمام مجموعه های باز می باشد.

تعریف ۱۹.۲.۲. فرض کنید X و Y دو مجموعه ناتهی و $P(X)$ ، $P(Y)$مجموعه های توانی آنها باشند در اینصورت تابع $f : A \subset P(X) \to P(Y)$ یک تابع مجموعه ای [۱۳] می نامیم.

به عنوان مثال تابعی که به هر بازه (a, b) عدد حقیقی $b - a$ را نسبت می دهد یک تابع مجموعه ای می باشد.

تعریف ۲۰.۲.۲. فرض کنید X دسته ای از زیر مجموعه های اعداد حقیقی باشد. اندازه لبگ [۱۴] یک تابع مجموعه ایμ است که به هر مجموعه E یک عدد نامنفی توسعه یافته نسبت می دهد و دارای خواص

[۱۱] Support
[۱۲] Borel set
[۱۳] Set function
[۱۴] Lebesgue measure

زیر است:

الف) $\mu(\phi) = ۰$.

ب)برای هر بازه $I = (a, b)$ داشته باشیم: $\mu(I) = l(I) = b - a$.

ج)اگر $\{E_i\}$ یک دنباله از مجموعه های مجزا باشد آنگاه:

$$\mu(\cup E_i) = \Sigma \mu(E_i)$$

د)μ نسبت به انتقال پایا باشد. یعنی اگر E مجموعه ای باشد که برای آن μ تعریف شده و

$$E + y = \{x + y : x \in E\} \quad \Longrightarrow \quad \mu(E + y) = \mu(E)$$

تعریف ۲۱.۲.۲. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد و $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر از زیر مجموعه های X باشد، در این صورت اندازهμ یک تابع مجموعه ای نامنفی است که برای تمام عناصر $\mathfrak{M}$ تعریف شده است و داریم:

الف) $\mu(\phi) = ۰$.

ب)برای هر دنباله E_i از عناصر مجزا $\mathfrak{M}$ داریم:

$$\mu(\cup_{i=۱}^{\infty} E_i) = \Sigma_{i=۱}^{\infty} \mu(E_i)$$

تعریف ۲۲.۲.۲. اگر X یک مجموعه ناتهی باشد و $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر از زیر مجموعه های X باشد در اینصورت $(X, \mathfrak{M})$ را یک فضای اندازه پذیر گویند.

تعریف ۲۳.۲.۲. فرض کنید A مجموعه ای از اعداد حقیقی باشد و$\{I_n\}$ گردایه ای از بازه های باز $I_n = (a_n, b_n)$ است که مجموعه A را می پوشاند.در اینصورت اندازه بیرونی [۱۵] A را بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup I_n} \Sigma l(I_n)$$

[۱۵]Outer measure

که درآن اینفیمم روی گردایه های $\{I_n\}$ گرفته می شود.

تعریف ۲۴.۲.۲. مجموعه E اندازه پذیر لبگ [۱۶] است اگر برای هر مجموعه A داشته باشیم:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

تعریف ۲۵.۲.۲. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر از زیر مجموعه های X باشد و υ یک تابع مجموعه ای با مقادیر حقیقی توسعه یافته باشد در اینصورت υ را یک اندازه علامتدار [۱۷] روی فضای اندازه پذیر $(X, \mathfrak{M})$ می نامیم هر گاه:

الف)υ حداکثر یکی از دو مقدار $+\infty$ یا $-\infty$ را اختیار کند.

ب) $\upsilon(\phi) = ۰$.

ج)برای هر دنباله E_i مجموعه های مجزا از هم و اندازه پذیر داشته باشیم:

$$\upsilon(\cup E_i) = \Sigma \upsilon(E_i)$$

تعریف ۲۶.۲.۲. فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد و دامنه f اندازه پذیر باشد در اینصورت تابع f اندازه پذیر گفته می شود هر گاه برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ اندازه پذیر باشد.

قضیه ۲۷.۲.۲. [۶] فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی با دامنه اندازه پذیر باشد در اینصورت گزاره های زیر هم ارزند:

الف) برای هر عدد حقیقی α مجموعه $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ اندازه پذیر است.

ب) برای هر عدد حقیقی α مجموعه $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ اندازه پذیر است.

ج) برای هر عدد حقیقی α مجموعه $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ اندازه پذیر است.

د) برای هر عدد حقیقی α مجموعه $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ اندازه پذیر است.

[۱۶] lebesgues measurable
[۱۷] Signed measure

در صورت بر قراری یکی از گزاره های فوق گزاره زیر نتیجه می شود.

ذ) برای هر عدد حقیقی α مجموعه $\{x \in X : f(x) = \alpha\}$ اندازه پذیر است.

تعریف ۲.۲.۲۸. فرض کنید که X یک فضای هاسدورف و به طور موضعی فشرده و $C_c(X)$ مجموعه تمام توابع پیوسته با محمل فشرده در X باشد. کوچکترین $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}$ از زیر مجموعه های X که هر تابع $f \in C_c(X)$ نسبت به $\mathfrak{M}$ اندازه پذیر باشد رده مجموعه های بیر [18] را تشکیل می دهد.

تعریف ۲.۲.۲۹. اگر μ یک اندازه باشد که روی $\sigma-$ جبر از مجموعه های بیر تعریف شده آنگاه μ یک اندازه بیر [19] است.

تعریف ۲.۲.۳۰. سه تایی $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه [20] نامیده می شود که در آن X یک مجموعه غیر تهی و $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر از زیر مجموعه های X و μ یک اندازه روی $\mathfrak{M}$ می باشد.

تعریف ۲.۲.۳۱. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیکی و $\mathfrak{M}$ یک جبر تولید شده توسط زیر مجموعه های باز باشد برای هر مجموعه برل A اندازه اتمی [21] بصورت زیر تعریف می شود:

$$\delta_{(z)}(A) = \begin{cases} ۱ & z \in A \\ ۰ & z \in A^c \end{cases}$$

تعریف ۲.۲.۳۲. [۶] فرض کنید f یک تابع اندازه پذیر نامنفی روی یک مجموعه A باشد و فرض کنید $\{A_i : i = ۱, ۲, ..., n\}$ یک دنباله متناهی از مجموعه ها باشد که:

الف) A_i جدا از هم باشند یعنی $A_i \cap A_j = \phi$.

ب) A_i ها اندازه پذیر است.

ج) $A = \cup_{i=۱}^{n} A_i$.

در اینصورت گفته می شود که $\{A_i : i = ۱, ۲, ..., n\}$ یک افراز [22] مجموعه A است همچنین فرض

[18] Bair set
[19] Bair meassure
[20] Measure spase
[21] Atomic measure
[22] Partition

کنید تابع f بر A نامنفی است و

$$S = \Sigma_{i=1}^{n}\{inf_{z\in A_i} f(z)\}\mu(A_i)$$

انتگرال تابع f روی مجموعه A را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\int_A f d\mu = Sup S \geq 0$$

که انتگرال تابع f نسبت به اندازه μ است.

و سوپرمیمم روی تمام افراز های ممکن مجموعه A گرفته شده است و در صورتی که حد فوق موجود و متناهی باشد تابع f، μ-اندازه پذیر گفته می شود در مورد توابعی که شرط نامنفی بودن را ندارد می توان نوشت $f = f^+ - f^-$ که توابع f^+ ، f^- نامنفی می باشند وداریم:

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

تعریف ۳۳.۲.۲. تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ بطور مطلق پیوسته [۲۳] گفته می شود اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ موجود باشد بطوری که اگر $\{(x_i, \acute{x}_i), i = 1, 2, ..., n\}$ زیر بازه های مجزا $[a,b]$ باشند ، داشته باشیم:

$$\Sigma_{i=1}^{n} \mid \acute{x}_i - x_i \mid < \delta \quad \Longrightarrow \quad \Sigma_{i=1}^{n} \mid f(\acute{x}_i) - f(x_i) \mid < \varepsilon$$

تعریف ۳۴.۲.۲. اگر تابع حقیقی f تعریف شده باشد و در نقطه $x_0 \in (a,b)$ ناپیوسته باشد و حدود چپ و راست موجود باشد یعنی:

$$Lim_{t\to x_0^+} f(t) = L_1 \neq \infty$$

$$Lim_{t\to x_0^-} f(t) = L_2 \neq \infty$$

و $L_1 \neq L_2$ در این صورت f در x_0 ناپیوستگی نوع اول دارد و در غیر اینصورت ناپیوستگی دوم دارد.

[۲۳] Absolutely continuous

تعریف ۳۵.۲.۲. تابع حقیقی f بر $[a,b]$ بطور قطعه ای پیوسته است هر گاه حداکثر تعدادی متناهی ناپیوستگی نوع اول داشته باشد.

تعریف ۳۶.۲.۲. فرض کنید P یک خاصیت باشد که روی عناصر مجموعه ای تعریف شده، در اینصورت P تقریباً همه جا برقرار است اگر مجموعه نقاطی که خاصیت P را ندارد، دارای اندازه صفر باشند و معمولاً بطور خلاصه می نویسیم P بطور $a.e.$ برقرار است.

لم ۳۷.۲.۲. [۶] فرض کنید f تابعی حقیقی و بر $[a,b]$ کراندار و اندازه پذیر و $F(x)=\int_a^x f(t)dt+F(a)$ آنگاه تقریباً برای هر x در $[a,b]$ داریم: $F'(x)=f(x)$

قضیه ۳۸.۲.۲. [۶] تابع حقیقی F بطور مطلق پیوسته است اگر وتنها اگر F انتگرال نامعین باشد ودر اینصورت داریم:

$$F(x)=\int_a^x F'(t)dt+F(a)$$

قضیه ۳۹.۲.۲. فرض کنید f تابعی حقیقی و بر $[a,b]$ کراندار و اندازه پذیر است در اینصورت تابع F که با ضابطه زیر تعریف می شود بطور مطلق پیوسته است $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

اثبات. باید ثابت کنیم که برای هر $\varepsilon>۰$ داده شده $\delta>۰$ موجود است که اگر $\{(x_i,x_i'),i=۱,۲,...,n\}$ زیر بازه های مجزا از $[a,b]$ باشند و

$$\Sigma_{i=۱}^n \mid x_i'-x_i\mid<\delta \quad\Longrightarrow\quad \Sigma_{i=۱}^n \mid F(x_i')-F(x_i)\mid<\varepsilon$$

$$\Sigma_{i=۱}^n \mid F(x_i')-F(x_i)\mid=\Sigma_{i=۱}^n \mid \int_{x_i}^{x_i'} f(t)dt\mid\le\Sigma_{i=۱}^n\int_{x_i}^{x_i'}\mid f(t)\mid dt\le\Sigma_{i=۱}^n\|f\|.|x_i'-x_i|=\|f\|.\delta$$

که در آن $\|f\|=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ ، و برای اثبات حکم کافی است قرار دهیم:

$$\delta\le\frac{\varepsilon}{\|f\|}$$

و چون هر تابع که بر بازه بسته ای بطور قطعه ای پیوسته باشد بر آن بازه کراندار و اندازه پذیر است از قضایای قبل قضیه زیر نتیجه می شود. ■

قضیه ۴۰.۲.۲. اگر تابع حقیقی f بر $[a,b]$ بطور قطعه ای پیوسته باشد یک تابع F موجود است که بر $[a,b]$ بطور مطلق پیوسته است و تقریباً برای هر x در $F'(x)=f(x)$ و نیز

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a).$$

تعریف ۴۱.۲.۲. فرض کنید $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ کراندار باشد و یک افراز $\{\Omega_i : i=۱,۲,...,n\}$ از Ω موجود باشد طوریکه f روی هر Ω_i با توپولوژی نسبی پیوسته باشد و گردایه $\{A_i : i=۱,۲,...,n\}$ از زیر مجموعه های اعداد حقیقی موجود باشد طوریکه هر A_i در $\mathbb{R}^n$ همبند است و برای $i=۱,۲,...,n$، $\Omega_i\subset A_i$ در اینصورت تابع f را ناحیه ای پیوسته گوییم.

به عنوان مثال تابع f با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x>۰\\ ۰ & x\leq ۰\end{cases}$$

ناحیه ای پیوسته نیست زیرا کراندار نیست.

ولی توابع زیر در شرایط تعریف ناحیه ای پیوستگی صدق می کنند

$$f(x)=\begin{cases}x^۲+x & ۰<x<۱\\ -x^۲+x+۱ & ۱\leq x<۲\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}۲ & x>۰\\ -۲ & x\leq ۰\end{cases}$$

و نیز برای تابع زیر داریم

$$f(x)=\begin{cases}۰ & x\in Q\cap[۰,۱]\\ ۱ & x\in[۰,۱]-Q\end{cases}$$

تابع f کراندار می باشد و اگر قرار دهیم $\Omega_۱=Q\cap[۰,۱]$ و $\Omega_۲=[۰,۱]-Q$ در اینصورت f بر هر یک از مجموعه های $\Omega_۱$ و $\Omega_۲$ با توپولوژی نسبی پیوسته است ولی دو مجموعه همبند و مجزای $A_۱$ و