# بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش مترويد

# تعمیم شکافتن خطی از گرافها به ماترویدهای دودویی

استاد راهنما:

دکتر قدرت ا.. آزادی

نگارش:

عاطفه حاجی کریمی

اسفند ۸۶

تقدیم به

همسر بی همتایم

## سپاسگزاری


شکر و سپاس خداوندی را سزاست که به ما عقلی عطا فرمود تا بتوانیم بیندیشیم و یاد گیریم و در راستای پیشرفت و تکامل قدمی برداریم. پس از لطف و عنایت الهی از حمایت های بی دریغ همسر *مهربانم* و *پدر و مادر عزیز و خواهرانم* و *همچنین از خانواده* همسرم که با ایجاد محیطی آرام، شرایط را برای پیشبرد پروژه من فراهم کردند، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

همچنین برخود لازم می دانم از هدایت های بی شائبه استاد راهنمای خود **جناب آقای دکتر قدرت ا.. آزادی** سپاسگزاری کنم که تلاش و همکاری ایشان همواره باعث دلگرمی و افزایش روحیه پژوهش برای من بوده است و بدون راهنمایی های ایشان، این پروژه هیچگاه به نتیجه لازم نمی رسید.

از خانمها شادی امیری، *فاطمه کریمی*، *بهارک موسوی و برادر عزیزم عطا حاجی کریمی*، که مرا در انجام این پروژه کمک کردند، با تمام وجود تشکر می نمایم.

در نهایت از تمامی *دوستان* و *اساتیدی* که در دانشکده علوم دانشگاه ارومیه مرا حمایت کردند، سپاسگزارم.

**پایان نامه خانم عاطفه حاجی کریمی به تاریخ ۱۳۸۶/۱۲/۱۳ شماره ۸۱۸-۲ مورد پذیرش هیئت محترم داوران با رتبه بسیار خوب و نمره ۱۷/۷۵ قرار گرفت.**

۱-استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : آقای دکتر قدرت اله آزادی

۲-استاد مشاور :

۳-داور خارجی:آقای دکتر حبیب اذانچیلر

۴-داور داخلی:آقای دکتر سعید استادباشی

۵-نمایندە تحصیلات تکمیلی: آقای دکتر هادی گودرزی

# فهرست مندرجات

# چکیده

این پژوهش بر مبنای مقاله دکتر حبیب اذانچیلر با عنوان تعمیم شکافتن خطی از گرافها به ماترویدهای دودویی [1] نوشته شده است. در این پایان نامه نوع جدیدی از شکافتن، یعنی شکافتن خطی روی گرافها معرفی شده و دورها و پایه‌ها و همچنین ماتریس نمایش این گراف شکافته شده مورد بررسی قرار می گیرد و سپس این نوع شکافتن را به ماترویدهای دودویی تعمیم خواهیم داد که برای این منظور ابتدا شکافتن تعمیم یافته و نقطه‌ای را در گرافها بررسی کرده و سپس به ماترویدهای دودویی تعمیم می دهیم.

[1] Lobachevskii Jornal of Mathematics, Vol. 24, 2006, 3-12. http://1jm.ksu.ru

# مقدمه

این پایان نامه در پنج فصل اصلی نوشته شده است.

فصل اول به تعاریف و قضایای مقدماتی نظریه گراف و ماترويد اختصاص یافته است.

در فصل دوم نوعی از عمل شکافتن بنام عمل شکافتن تعمیم یافته در گرافها معرفی می شود که زمینه ساز فصلهای بعدی می باشد. ابتدا این عمل را روی گرافها تعریف کرده و سپس به ماترویدهای دودویی تعمیم می دهیم و به بررسی پایه‌ها و دورها و ماتریس نمایش ماتروید شکافته شده می‌پردازیم و چند مورد از کاربردهای آن را بیان می کنیم.

در فصل سوم شکافتن نقطه‌ای را مورد بحث قرار می دهیم. ابتدا این عمل را روی گرافها تعریف کرده و سپس به ماترویدهای دودویی تعمیم می دهیم و پایه‌ها و دورها و ماتریس نمایش ماتروید حاصل از شکافتن نقطه‌ای و کاربردهای آن را بررسی می کنیم.

فصل چهارم که هدف اصلی این پایان نامه است ابتدا عمل شکافتن خطی در گرافها و ماترویدها را بررسی کرده و سپس به ماترویدهای دودویی تعمیم می دهیم و مانند فصول قبل به بررسی پایه ها و دورها و ماتریس نمایش ماتروید شکافته شده پرداخته و کاربردهایی از این ماتریس را به اختصار شرح می دهیم.

در پایان، فصل پنجم به بررسی همبندی گرافها و ماترویدهای شکافته شده همبند و ناهمبند و بررسی همبندی ماتروید شکافته شده‌ی $M_X^e$ اختصاص یافته است.

# فصل ۱

# تعاریف و مفاهیم مقدماتی

## ۱.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه‌ی گراف

در این فصل برخی مفاهیم مقدماتی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند ارائه می‌دهیم.

**تعریف ۱.۱.۱** یک گراف[۱] سه‌تایی متشکل از یک مجموعه‌ی متناهی و غیرخالی $V(G)$ که اعضای آن رأس[۲]های گراف و مجموعه‌ی $E(G)$ که اعضای آن یال[۳]های گراف $G$ نامیده می‌شود و رابطه‌ای که به هر عضو $E(G)$ دو عضو از $V(G)$ را وابسته می‌کند، می‌باشد.

اگر $e = uv$ یک یال از $G$ باشد، $u$ و $v$ را نقاط انتهایی[۴] یا رأس‌های انتهایی $e$ و $e$ را یال واقع بر $u$ و $v$ گویند.

اگر $e = uu$ یک یال $G$ باشد، $e$ را طوقه[۵] و اگر نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند، آن‌ها را یال‌های موازی یا یال‌های چندگانه[۶] گویند.

گراف ساده[۷] گراف فاقد طوقه[۸] و یالهای موازی می‌باشد.

---

[۱] graph
[۲] vertex
[۳] edge
[۴] endpoints
[۵] loop
[۶] multiple
[۷] simple graph
[۸] loopless

**تعریف ۲.۱.۱** گراف $H$ زیرگراف [۹] $G$ است اگر:

۱) $V(H) \subseteq V(G)$

۲) $E(H) \subseteq E(G)$

دراین صورت آن را به‌صورت $H \subseteq G$ نشان داده و گوییم $G$ شامل $H$ است.

اگر $V(H) = V(G)$، آنگاه $H$ را زیرگراف فراگیر [۱۰] $G$ گویند.

**تعریف ۳.۱.۱** فرض کنید $G$ یک گراف و $E$ مجموعه‌ی یال‌های آن و $E_1 \subseteq E$ باشد. زیرگراف تولید شده توسط $E_1$، گرافی است که $E_1$ مجموعه‌ی یال‌های آن و نقاط انتهایی یال‌های $E_1$ مجموعه‌ی رئوس آن می‌باشد. این زیرگراف را با نماد $G[E_1]$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۴.۱.۱** فرض کنیم $G$ یک گراف فاقد طوقه با $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ و $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ باشد. ماتریس مجاورت [۱۱] گراف $G$ یک ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$ است که در آن سطرها و ستونهای ماتریس متناظر با رأسهای $G$ بوده و $a_{ij}$ تعداد یالهای بین دو رأس $v_i$ و $v_j$ می‌باشد.

**تعریف ۵.۱.۱** ماتریس وقوع [۱۲] گراف، یک ماتریس $M = (m_{ij})_{n\times m}$ است که در آن سطرها متناظر با رأس ها و ستون ها متناظر با یال های گراف هستند و $m_{ij} = 1$ اگر رأس $v_i$ بر یال $e_j$ واقع باشد و در غیر اینصورت $m_{ij} = 0$

**تعریف ۶.۱.۱** برای هر رأس $v \in V(G)$ درجه [۱۳] رأس $v$ را تعداد یال های واقع بر آن رأس تعریف می کنیم و آن را با $d(v)$ نشان می دهیم.

---

[۹] subgraph

[۱۰] spanning subgraph

[۱۱] adjacency matrix

[۱۲] incidence matrix

[۱۳] degree

**تعریف ۷.۱.۱** گرافی که درجه هر رأس آن زوج باشد گراف زوج [۱۴] و گرافی که درجه هر رأس آن فرد باشد را گراف فرد [۱۵] گویند.

**تعریف ۸.۱.۱** رأسی که هیچ یالی بر آن واقع نباشد (رأس با درجه صفر) را رأس تنها[۱۶] گوییم.

**تعریف ۹.۱.۱** گراف بدون یال و با رأس های تنها را گراف بدیهی [۱۷] می گوییم.

**تعریف ۱۰.۱.۱** یک گشت[۱۸] در گراف $G$ دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌های $G$ به صورت زیر است.

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$$

که در آن $v_{i-1}$ و $v_i$ نقاط انتهایی یال $e_i$ هستند.

اگر هیچ یالی در یک گشت تکرار نشود، آن را یک گذر[۱۹] گویند. یک مسیر[۲۰] گذری است که در آن هیچ رأسی تکرار نشود. مسیر $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$ را که در آن رابطه‌ی $v_0 = v_n$ برقرار باشد، دور[۲۱] گویند. گراف بی‌دور [۲۲] گرافی است که هیچ دوری نداشته باشد.

**تعریف ۱۱.۱.۱** گراف $G$ را همبند گوییم هرگاه برای هر $u, v \in V(G)$ مسیری شامل $u$ و $v$ وجود داشته باشد.

**تعریف ۱۲.۱.۱** کمر [۲۳] یک گراف $G$ که دارای دور است طول کوتاهترین دور در آن گراف است. برای گرافهای بی‌دور کمر $\infty$ است.

[۱۴] even
[۱۵] odd
[۱۶] isolated vertex
[۱۷] Trivial Graph
[۱۸] walk
[۱۹] trail
[۲۰] path
[۲۱] circuit
[۲۲] acyclic
[۲۳] girth

**تعریف ۱۳.۱.۱** یک گراف بی‌دور را جنگل[۲۴] و گراف همبند[۲۵] بی‌دور را درخت[۲۶] گویند. هر زیرگراف فراگیر از گراف $G$ که یک درخت باشد را درخت فراگیر[۲۷] گراف $G$ گویند.

**تعریف ۱۴.۱.۱** هر زیر گراف همبند ماکسیمال $G$ را یک مولفه‌ی $G$ [۲۸] گویند. به عبارت دیگر گراف $G$ همبند است اگر و فقط اگر $G$ فقط یک مولفه داشته باشد.

**تعریف ۱۵.۱.۱** گرافی را که همبند نباشد گراف ناهمبند [۲۹] گوییم.

اگر یالی بین دو مولفه‌ی یک گراف رسم شود، آنگاه این دو مولفه تبدیل به یک مولفه خواهند شد. پس با افزودن یک یال جدید به گراف $G$ یا تعداد مولفه های همبند $G$ تغییر نمی کند و یا در صورت تغییر دقیقاً یک مولفه کم می شود و لذا با حذف یک یال از گراف $G$ یا تعداد مولفه ها تغییر نمی کند و یا یک مولفه اضافه می شود.

**تعریف ۱۶.۱.۱** مولفه ای که هیچ یالی نداشته باشد را مولفه بدیهی [۳۰] گویند.

**قضیه ۱۷.۱.۱** یک گراف همبند با $n$ رأس ، حداقل $n - 1$ یال دارد.

اثبات در مرجع (۱۰)

**قضیه ۱۸.۱.۱** هر گراف با $n$ رأس و $k$ یال، حداقل $n - k$ مولفه دارد.

اثبات در مرجع (۱۰)

**تعریف ۱۹.۱.۱** همبندی $G$ که آن را با $\kappa(G)$ نشان می‌دهیم عبارت است از کمترین تعداد رأس های ممکن که با حذف آن ها یک گراف نا همبند یا یک رأس تنها حاصل شود. گراف $G$ را یک گراف $k$- همبند

[۲۴] forest
[۲۵] connected
[۲۶] tree
[۲۷] spanning tree
[۲۸] component
[۲۹] disconnected
[۳۰] trivial

گویند اگر $\kappa(G) \geq k$. یک گراف با حداقل دو رأس، ۱–همبند است اگر و تنها اگر همبند باشد.

**تعریف ۲۰.۱.۱** رأس $v$ از گراف $G$ را رأس برش [۳۱] گویند اگر تعداد مولفه های همبند $G - \{v\}$ بیشتر از تعداد مولفه های همبند $G$ باشد.(حذف $v$ تعداد مولفه های همبند را افزایش دهد.)

**تعریف ۲۱.۱.۱** یال $e$ از گراف $G$ را یک یال برش [۳۲] گویند، اگر تعداد مولفه های $G - \{e\}$ یکی بیشتر از تعداد مولفه های $G$ باشد.

**قضیه ۲۲.۱.۱** یک یال از گراف $G$ یال برش است اگر و تنها اگر قسمتی از یک دور نباشد.

اثبات در مرجع (۱۰)

## ۲.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه‌ی متروید

**تعریف ۱.۲.۱** متروید [۳۳] $M$ زوج مرتب $M = (E, \mathcal{F})$ است که در آن $E$ مجموعه‌ای متناهی و $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های $E$ است که در سه شرط زیر صدق می‌کنند:

$(\mathcal{F}_1)$: $\phi \in \mathcal{F}$.

$(\mathcal{F}_2)$: اگر $F \in \mathcal{F}$ و $F' \subseteq F$ آنگاه $F' \in \mathcal{F}$.

$(\mathcal{F}_3)$: اگر $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ و $|F_1| < |F_2|$، آنگاه عضوی مثل $e \in F_2 - F_1$ وجود دارد که $F_1 \cup \{e\} \in \mathcal{F}$.

اگر $M = (E, \mathcal{F})$ یک متروید باشد، آنگاه $M$ را مترویدی روی $E$ و $E$ را مجموعه‌ی زمینه‌ی [۳۴] آن گویند. هر عضو $\mathcal{F}$ یک مجموعه‌ی مستقل [۳۵] $M$ نامیده می‌شود.

زیرمجموعه‌هایی از $E$ را که در $\mathcal{F}$ نیستند مجموعه‌های وابسته [۳۶] $M$ گویند.

[۳۱] cut-vertex
[۳۲] cut-edge
[۳۳] matroid
[۳۴] ground set
[۳۵] independent set
[۳۶] dependent set

**مثال ۲.۲.۱** فرض کنید $S$ یک مجموعه از بردارها باشد و $\mathcal{F}$ گردایه‌ی تمامی زیرمجموعه‌های مستقل خطی $S$ باشد. آنگاه $(S, \mathcal{F})$ یک متروید روی $S$ است.

$(\mathcal{F}_1)$: تهی یک مجموعه‌ی مستقل خطی است.

$(\mathcal{F}_2)$: هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی مستقل خطی، مستقل خطی است.

$(\mathcal{F}_3)$: فرض کنیم $X, Y \in \mathcal{F}$ و $|Y| < |X|$. بعلاوه فرض کنید $W$ زیرفضای تولید شده توسط $X \cup Y$ باشد. پس $\mathrm{dimW} \geq |\mathrm{X}|$. حال فرض کنید که برای هر $x \in X - Y$ مجموعه‌ی $Y \cup \{x\}$ وابسته‌ی خطی باشد. داریم $\mathrm{dimW} \leq |\mathrm{Y}|$ و لذا $|X| \leq \mathrm{dimW} \leq |\mathrm{Y}| < |X|$ . یعنی $|X| < |X|$ و این تناقض است. بنابراین $x \in X - Y$ وجود دارد که $Y \cup \{x\}$ مستقل خطی است. یعنی $Y \cup x \in \mathcal{F}$. پس $M = (S, \mathcal{F})$ یک متروید است.

**تعریف ۳.۲.۱** متروید تعریف شده در مثال بالا را متروید برداری [۳۷] می‌نامیم.

**مثال ۴.۲.۱** فرض کنید $G$ یک گراف باشد و $S = E(G)$. مجموعه $\mathcal{F}$ را شامل مجموعه یالهای تمامی زیر گرافهای بی دور $G$ در نظر بگیرید.(یعنی $\mathcal{F}$ شامل زیر مجموعه هایی از $S$ است که زیر گراف تولید شده توسط آنها بی دور باشد) تحت این شرایط $(S, \mathcal{F})$ یک متروید است.

**تعریف ۵.۲.۱** متروید معرفی شده در مثال بالا را متروید دوری گراف $G$ تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۶.۲.۱** فرض کنید $|S| = n$ و $\mathcal{I}$ را مجموعه‌ی تمامی زیر مجموعه‌های $S$ در نظر می‌گیریم که حداکثر $k$ عضو دارند $(k \leq n)$. آنگاه $(S, \mathcal{I})$ یک متروید است. این متروید را متروید یکنواخت [۳۸] گوییم و با $U_{n,k}$ نشان می‌دهیم و

$$\mathcal{I}(U_{n,k}) = \{X \subseteq E \mid \quad |X| \leq n\}$$

---

[۳۷] vector matroid

[۳۸] uniform matroid

**تعریف ۷.۲.۱** فرض کنید $M=(E,\mathcal{I})$ یک متروید و $X\subseteq E$ باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{I}|X=\{I\subseteq X|I\in\mathcal{I}\}$. می‌توان دید که $(X,\mathcal{I}|X)$ یک متروید است. این متروید را تحدید $M$ به $X$ یا حذف $E-X$ از $M$ گویند. این متروید با نماد $M|X$ یا $M\backslash E-X$ نمایش داده می‌شود.

**تعریف ۸.۲.۱** زیرمجموعه‌ی وابسته‌ی مینیمال $M$ را یک دور گویند.

گردایه‌ی همه‌ی دورهای $M$ را با $\mathcal{C}(M)$ و یا با $\mathcal{C}$ نمایش می‌دهیم.

دوری از $M$ را که شامل $n$ عضو باشد یک $n-$ دور گویند. اعضای $\mathcal{F}$ آن زیرمجموعه‌هایی از $E(M)$ هستند که شامل هیچ عضوی از $\mathcal{C}(M)$ نیستند.

بنابراین یک متروید با معلوم بودن دورهایش شناسایی می‌شود.

**قضیه ۹.۲.۱** مجموعه‌ی $\mathcal{C}$ از دورهای متروید $M$ دارای خواص زیر است:

$(C_1)$ $\phi\notin\mathcal{C}$.

$(C_2)$ اگر $C_1,C_2\in\mathcal{C}$ و $C_1\subseteq C_2$، آنگاه $C_1=C_2$.

$(C_3)$ اگر $C_1$ و $C_2$ دو عضو متمایز $\mathcal{C}$ باشند و $e\in C_1\cap C_2$، آنگاه عضوی مثل $C_3$ از $\mathcal{C}$ وجود دارد بطوریکه

$$C_3\subseteq (C_1\cup C_2)-e.$$

اثبات در مرجع (۱)

**قضیه ۱۰.۲.۱** فرض کنید $E$ یک مجموعه و $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های $E$ باشد که در سه شرط فوق صدق می کند. فرض کنید $\mathcal{F}$ گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های $E$ باشد که شامل هیچ عضو $\mathcal{C}$ نیستند. آنگاه $(E,\mathcal{F})$ یک متروید است که $\mathcal{C}$ گردایه‌ی تمام دورهای آن است.

اثبات در مرجع (۱)

**لم ۱۱.۲.۱** اگر $C_1$ و $C_2$ دورهایی از متروید $M$ باشند که $C_1\cap C_2\neq\emptyset$، آنگاه برای هر $x\in C_1$ و $y\in C_2$، دوری مثل $C_3$ از $M$ وجود دارد که $x,y\in C_3$ و $C_3\subseteq C_1\cup C_2$.

اثبات در مرجع (۱)

**تعریف ۱۲.۲.۱** دو ماترویید $M_1$ و $M_2$ را یکریخت گویند و می‌نویسند $M_1 \cong M_2$ اگر تناظر یک‌به‌یک

$$\psi : E(M_1) \to E(M_2)$$

وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $X \subseteq E$، $\psi(X)$ مجموعه‌ای مستقل در $M_2$ است اگر و تنها اگر $X$ در $M_1$ مستقل باشد.

**تعریف ۱۳.۲.۱** ماترویید $M$ را گرافیک[39] گویند هرگاه گرافی وجود داشته باشد که ماترویید دوری تولید شده توسط آن یکریخت با $M$ باشد.

**تعریف ۱۴.۲.۱** هر مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال ماترویید $M$ را یک پایه‌ی[40] $M$ گویند.

**لم ۱۵.۲.۱** فرض کنید $B_1$ و $B_2$ دو پایه از ماترویید $M$ باشند. آنگاه $|B_2| = |B_1|$. فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های $E$ باشد. آنگاه $\mathcal{B}$ گردایه‌ی پایه‌های یک ماترویید روی $E$ است اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند:

$(B_1)$ $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

$(B_2)$ اگر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ و $x \in B_1 - B_2$ آنگاه عضو $y \in B_2 - B_1$ وجود دارد بطوریکه $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

اثبات در مرجع (۱)

**تعریف ۱۶.۲.۱** فرض کنید $B$ پایه‌ای از ماترویید $M$ باشد. آنگاه برای هر $e \in E \backslash B$، $B \cup e$ شامل دوری یکتا مثل $C(e, B)$ می‌باشد. به‌علاوه $e \in C(e, B)$.

$C(e, B)$ را دور اصلی $e$ وابسته به پایه‌ی $B$ گوییم.

[39] graphic

[40] base

**تعریف ۱۷.۲.۱** فرض کنید $M = (S, \mathcal{F})$ یک متروید باشد و $X \subseteq S$. رتبه[۴۱]ی $X$ در متروید $M$ را به این صورت تعریف می کنیم:

$$r(X) = Max\{|F| : F \subseteq X, \text{ یک مجموعه مستقل است } F\}$$

در واقع $r(X)$ برابر تعداد اعضای زیر مجموعه مستقل ماکسیمال $X$ است.

**تذکر ۱۸.۲.۱** فرض کنید $X, Y \subseteq E$ باشند. آنگاه:

($R_1$) اگر $X \subseteq E$، آنگاه $0 \leq r(X) \leq |X|$. در واقع اگر $X$ مجموعه‌ی مستقل باشد $r(X) = |X|$.

($R_2$) اگر $X \subseteq Y$، آنگاه $r(X) \leq r(Y)$.

($R_3$) اگر $X, Y \subseteq E$، آنگاه: $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y).$ [۴۲]

**قضیه ۱۹.۲.۱** فرض کنید $S$ یک مجموعه و $r : 2^s \to Z^+ \cup \{0\}$ تابعی است که در شرایط $R_1$ و $R_2$ و $R_3$ صدق می کنند. فرض کنید $\mathcal{F}$ گردایه‌ی زیر مجموعه های $X$ از $E$ باشد که $r(X) = |X|$. آنگاه $(S, \mathcal{F})$ یک متروید با تابع رتبه‌ی $r$ است.

اثبات در مرجع (۱)

**لم ۲۰.۲.۱** فرض کنید $M$ یک متروید با تابع رتبه‌ی $r$ باشد و $X \subseteq S$ آنگاه:

(i) $X$ مستقل است اگر و تنها اگر $r(X) = |X|$

(ii) $X$ یک پایه متروید $M$ است اگر و تنها اگر $r(X) = |X| = r(M)$.

(iii) $X$ یک دور است اگر و تنها اگر غیر خالی باشد و برای هر $x \in X$، $r(X - x) = |X| - 1 = r(X)$ اثبات در مرجع (۱)

**تعریف ۲۱.۲.۱** فرض کنید $M$ یک متروید روی $E$ با تابع رتبه‌ی $r$ باشد. تابع

$$\text{cl} : 2^E \to 2^E$$

---

[۴۱] rank

[۴۲] semimodular inequality

با ضابطه‌ی

$$\mathrm{cl}(X) = \{x \in E \mid r(X \cup x) = r(X)\}$$

را عملگربستار[۴۳] ماتروید $M$ گویند.

**تعریف ۲۲.۲.۱** فرض کنید $M = (E,\mathcal{I})$ یک ماتروید و $X \subseteq E$ . $cl(X)$ را بستار $X$ [۴۴] گویند و گاهی با $\bar{X}$ نیز نمایش می دهند.

**تعریف ۲۳.۲.۱** اگر $X = cl(X)$ آنگاه $X$ را یک مجموعهٔ بسته یا یک فلت [۴۵] گویند

یک ابر صفحه $M$ [۴٦] یک زیر مجموعهٔ بسته و از رتبه $r(M) - ۱$ از $M$ می باشد .

زیر مجموعهٔ $X$ از $M$ را یک مجموعهٔ فراگیر[۴۷] از $M$ گویند اگر $cl(X) = E(M)$ .

**قضیه ۲۴.۲.۱** فرض کنید $M$ یک ماتروید روی $S$ باشد و فرض کنید $\mathcal{B}^*(M) = \{E-B| \quad B \in \mathcal{B}(M)\}$. آنگاه $\mathcal{B}^*(M)$ گردایه‌ی پایه‌های یک ماتروید روی $S$ است.

اثبات در مرجع (۱)

**تعریف ۲۵.۲.۱** ماتروید روی $S$ که $\mathcal{B}^*(M)$ گردایه‌ی پایه‌های آن است دوگان $M$ [۴۸] نامیده می شود و این ماتروید را با $M^*$ نمایش می‌دهیم در واقع $\mathcal{B}^*(M) = \mathcal{B}(M^*)$. بدیهی است که $(M^*)^* = M$.

**تعریف ۲٦.۲.۱** پایه‌های $M^*$ یعنی پایه‌های دوگان ماتروید $M$ را همپایه‌های $M$ [۴۹] گویند. بهمین ترتیب دورهای دوگان ماتروید $M$ را همدورهای $M$ [۵۰] و ابر صفحه‌ها و مجموعه‌های مستقل و مجموعه‌های فراگیر

[۴۳] clouser operator
[۴۴] Span of X in M
[۴۵] Flat
[۴٦] Hyper Plane
[۴۷] Spaning Set of M
[۴۸] Dual
[۴۹] Cobases
[۵۰] Cocircuits

$M^*$ را به ترتیب هم ابرصفحه‌ها[۵۱] و مجموعه‌های هم مستقل [۵۲] و مجموعه‌های هم فراگیر [۵۳] $M$ گویند.

**تعریف ۲۷.۲.۱** ماترویید $M$ را خود دوگان[۵۴] گوییم هرگاه $M = M^*$.

**تعریف ۲۸.۲.۱** فرض کنید $V(m, F)$ یک فضای برداری روی میدان $F$ و $S$ یک زیر مجموعه‌ی آن باشد. ماترویید $M = (S, \mathcal{I})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$X \subseteq S$ در ماترویید $M$ مستقل است یعنی $X \in \mathcal{I}$ اگر و تنها اگر $X$ یک مجموعه‌ی مستقل خطی باشد.ماترویید $M$ را یک ماترویید برداری گوییم.

**تعریف ۲۹.۲.۱** اگر ماترویید $M$ یکریخت با ماترویید برداری روی میدان $F$ باشد، $M$ را $F$—قابل نمایش[۵۵] گوییم.

**تعریف ۳۰.۲.۱** فرض کنید $A$ یک ماتریس $m \times n$ روی میدان $F$ و $M[A]$ ماترویید برداری $A$ باشد آنگاه مجموعه‌ی زمینه‌ی ماترویید $M[A]$ یعنی مجموعه‌ی $E$ شامل علامتهای ستونهای $A$ است. در حالت کلی $M[A]$ ماتریس $A$ را بصورت منحصر به فرد مشخص نمی کند. زیرا اگر $M = M[A]$ آنگاه با انجام عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس $A$ ماترویید $M$ عوض نخواهد شد.

**تعریف ۳۱.۲.۱** فرض کنید $A_{m\times n}$ یک ماتریس غیر صفر باشد. با دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی می‌توان ماتریس $A$ را به ماتریس $[I_r|D]$ تبدیل کرد که در آن $I_r$ ماتریس $r \times r$ واحد و $D$ یک ماتریس $r \times (n-r)$ روی $F$ است.

بدیهی است که $r = r(M)$. ماتریس $[I_r|D]$ را نمایش ماتریسی استاندارد برای ماترویید $M$ گویند.

**تعریف ۳۲.۲.۱** ماترویید های قابل نمایش روی میدان $GF(۲)$ را دودویی [۵۶] گوییم.

Cohyperplane[۵۱]
Coindependent[۵۲]
Cospanning[۵۳]
Selfdual[۵۴]
F-reprosentable[۵۵]
Bainery [۵۶]