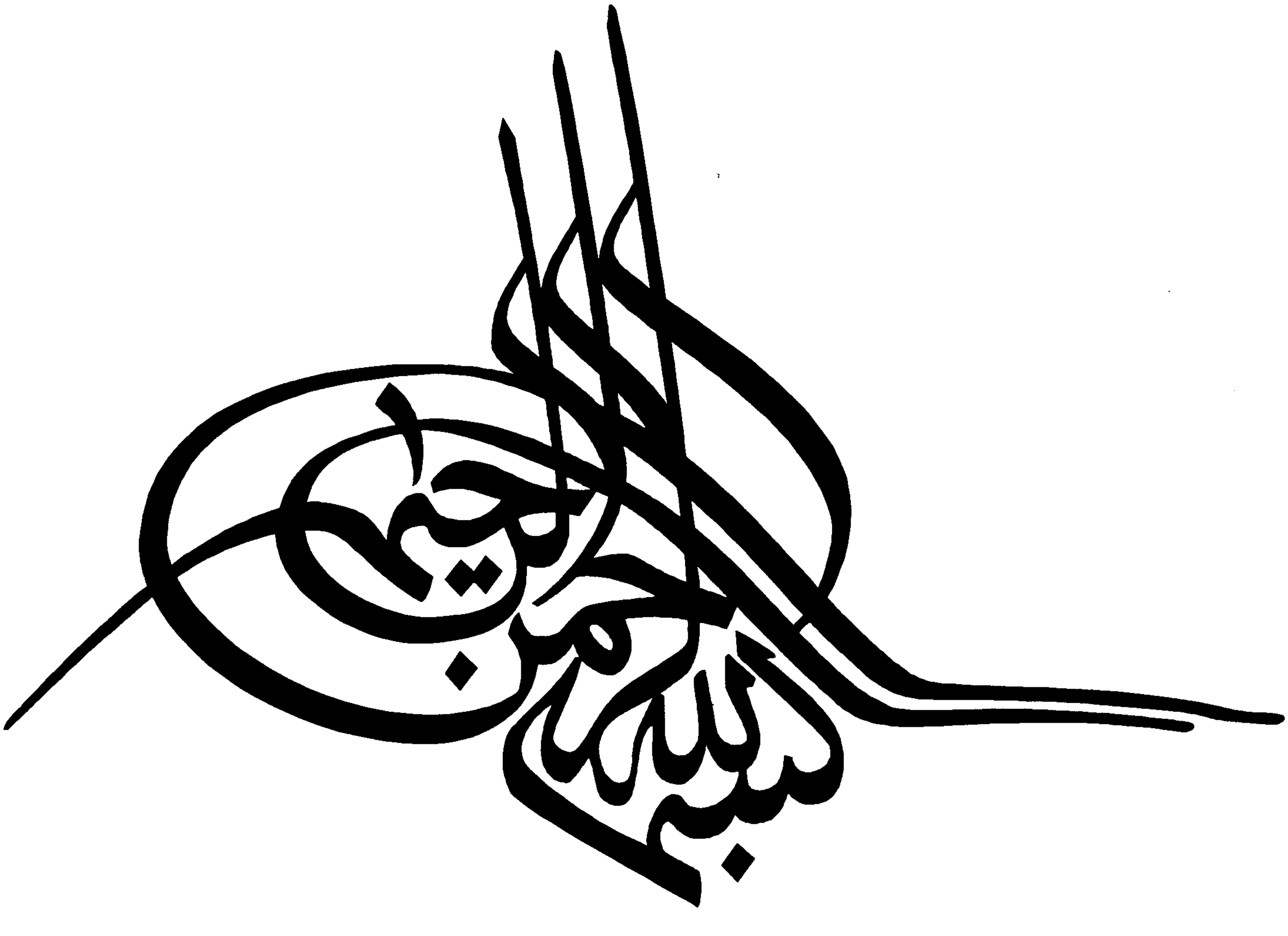


٦٩٨٢٦

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

گرایش محض

عنوان :

قضیه های نوسان برای معادله های دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دوم

از :

سید شهاب جزایری جونقانی

استاد راهنما :

دکتر نصیر تقی زاده

تیر ماه ۸٦

تقدیم به

پدر بزرگوار

مادر عزیز

و

همسر مهربانم

که گل های زندگیم هستند

تقدیر و تشکر

سپاس بی کران ایزد منان را که در پرتو لایزالش توفیق آموختن میسر گردید تا منت پذیر آستان کبریایش گردیم .
لازم می دانم از آقای دکترنصیر تقی زاده استاد راهنمای عزیزم به خاطر زحمات فراوان , از آقای دکتر بهروز فتحی به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی , از آقای دکتر جعفر بی آزار و آقای دکتر عباس سهله به عنوان داور, کمال تشکر خالصانه را ابراز دارم.
همچنین از خانواده عزیزم , از پدر بزرگوار و مادر عزیزم که در تمامی مراحل زندگی و تحصیلم, یار و پشتیبان من بودند و لطف بی دریغشان همواره با من بوده و هست , نهایت سپاس گذاری را دارم.

فهرست

چکیده :

قضیه های نوسان برای معادله های دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دوم

سید شهاب جزایری جونقانی

ما در این پایان نامه علاقه مند به دست آوردن نتایجی از رفتار نوسانی جواب های معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دوم

$$\left[a(t)\psi\left(x(t)\right)\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right]'+q(t)f\left(x(t)\right)=0$$

می باشیم که در آن توابع $\psi, f: R \to R$ و $a, q:\left[t_0, \infty\right) \to R$ پیوسته هستند و $\alpha > 0$ نیز یک ثابت است و همچنین برای $x \neq 0$ داریم $\psi(x) > 0, xf(x) > 0$ و $a(t) > 0$.

و قضیه های جدید نوسان برای این معادله دیفرانسیل و قضیه هایی در رابطه با رفتار نوسانی معادله های دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ارائه شده است.

کلید واژه :نوسان، معادلات دیفرانسیل غیر خطی، انتگرال میانگین ها.

Abstract:

oscillation theorems for nonlinear differential equations of second order.
S.sh. jazayery jonaghani.

In this dissertation we are interested in obtaining results on the oscillatory behavior of solution of second order nonlinear differential equation

$$\left[a(t)\psi\left(x(t)\right)\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right]' + q(t)f\left(x(t)\right) = 0$$

Where $\psi, f : R \to R$, $a, q : [t_0, \infty) \to R$ are continuous, $\alpha > 0$ Is a constant, $\psi(x) > 0, xf(x) > 0$ and $a(t) > 0$ for $x \neq 0$.
And present new oscillation theorems for this differential equation and theorems related with oscillatory behavior of solutions of second order linear deferential equations.

Keyword: oscillation, nonlinear differential equation, integral averages.

مقدمه :

حل معادلات دیفرانسیل همیشه و بر حسب توابع مقدماتی آشنا امکان پذیر نمی باشد بنابراین بررسی برخی خواص یک معادله دیفرانسیل بدون اینکه الزامی در بدست آوردن جواب آن معادله باشد هدفی بود که برای ریاضیدانان در خور توجه می نمود .

یکی از خواص مهم یک معادله دیفرانسیل ، نوسانی بودن آن است .

قضیه های نوسان توسط (PHILOS) (۱۹۸۹) ، برای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم معرفی شدند ، نتایج PHILOS توسط (GRACE) (۱۹۹۲) ، (LI و YEH)(۱۹۹۷) ، به معادلات دیفرانسیل غیر خطی تعمیم یافتند .

در فصل صفر این پایان نامه مطالب پیش نیازی که در سراسر این پایان نامه مورد نیاز می باشد ، بیان شده است .

در فصل اول نظریه نوسان و اهمیت آن در قالب مثال ها و قضیه هایی بیان شده است .

در فصل دوم نتایج GRACE به یک طبقه گسترده تر از معادلات دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دوم به صورت

$$\left[a(t)\psi(x(t))\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right]' + q(t)f(x(t)) = 0$$

تعمیم داده شده است ، که به این منظور قضیه های نوسان در مورد این معادله کلی بیان و اثبات می شوند و همچنین مثالهایی نیز در مورد آن بررسی شده است .

اکثر قضیه ها و نتایج ذکر شده در این پایان نامه از منبع [5] گرفته شده است .

فصل صفر

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۰ -۱ نکاتی چند از مقدمه ی معادلات دیفرانسیل

۰-۱-۱ معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل معادله ای است که شامل یک تابع وابسته و یک یا چند متغیر مستقل و مشتقات متغیر وابسته نسبت به متغیر های مستقل است .

اگر متغیر مستقل یکی باشد مشتقات معمولی هستند در این صورت معادله دیفرانسیل را معمولی و در غیر این صورت معادله دیفرانسیل را با مشتقات جزئی می نامیم .

۰-۱-۲ مرتبه یک معادله دیفرانسیل معمولی

مرتبه یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه بالاترین مشتق متغیر وابسته نسبت به متغیر یا متغیر های مستقل است .

۰-۱-۳ مثال :

(۱) $$\frac{dx}{dy}+2xy=e^{-x^2}$$

(۲) $$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0$$

(۳) $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$$

۰-۱-٤ قرارداد:

به دلیل این که ما در این پایان نامه فقط به معادلات دیفرانسیل معمولی می پردازیم لذا از این به بعد منظور ما از معادله دیفرانسیل همان معادله دیفرانسیل معمولی می باشد .

۰-۱-۵ معادلات دیفرانسیل مرتبه n ام

معادله دیفرانسیل مرتبه n ام معمولا به صورت کلی زیر نوشته می شود

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0 \qquad (I)$$

۰-۱-٦ جواب معاد له دیفرانسیل مرتبه n ام

همیشه فرض می کنیم بتوان معادله (I) را بر حسب $y^{(n)}$ حل کرد و آن را به صورت زیر نوشت

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}) \qquad (II)$$

که (II) را فرم نرمال معادله می نامیم .

تابعی مانند $y=\varphi(x)$ ، به طوری که

$f(x,\varphi(x),\varphi'(x),...,\varphi^{(n-1)}(x))$, روی بازه I , تعریف شده باشد و

$$f(x,\varphi(x),\varphi'(x),...,\varphi^{(n-1)}(x))=\varphi^{(n)}(x) \qquad x\in I$$

جواب معاد له (II) می نا میم.

۰-۱-۷ شرایط اولیه یا شرایط مرزی

اغلب جوابی از معادله دیفرانسیل را به دست می آوریم که شرایط داده شده ای را هم بپذیرد . اگر شرایط مورد نظر فقط در یک نقطه داده شوند ، شرایط را شرایط مرزی می نا میم.

۰-۱-۸ حالات خاص معادلات دیفرانسیل مرتبه n ام

الف)*معادلات دیفرانسیل مرتبه اول*

یک حالت خاص از معادلات دیفرانسیل مرتبه n ام معادلات دیفرانسیل مرتبه اول هستند ، که شکل کلی آنها به صورت زیر است

$$y'=f(x,y) \qquad (III)$$

که در آن f تابعی است که در ناحیه ای مانند D از صفحه xy تعریف شده است.

یک مساله مقدار اولیه در ارتباط با معادله (III) به صورت زیر است

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ب) *معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم*

صورت کلی این معادلات چنین است

$$y'' = f(x, y, y')$$

در یک تقسیم بندی کلی معادلات دیفرانسیل به دو دسته معادلات دیفرانسیل خطی و مادلات دیفرانسیل غیر خطی ، تقسیم می شوند.

۰-۱-۹ معادلات دیفرانسیل خطی

معادلات دیفرانسیل خطی معادلاتی هستند که در آنها مشتق بالاترین مرتبه ، تابعی خطی از مشتقات مراتب پایین تر و تابع وابسته باشد .

۰-۱-۱۰ معادلات دیفرانسیل غیر خطی

معادلات دیفرانسیلی را که خطی نباشند ،غیر خطی گویند.

این دسته از معادلات حالت کلی خاصی ندارند اما برای بعضی از این معادلات حالات خاصی وجود دارد که روی آنها کار شده است،به طور مثال برای معادلات دیفرانسیل غیر خطی مرتبه اول حالتهای خاصی وجود دارد.

حال به چند نمونه از این معادلات می پردازیم.

الف) *معادلات دیفرانسیل غیر خطی مرتبه اول*

در حالتهای خاصی از این معادلات دیفرانسیل روی جواب دقیق آنها نیز کار شده است .

۰-۱-۱۱ مثال: معادلات زیر غیر خطی مرتبه اول هستند .

1) $y' = \dfrac{2 + \sin x}{3(y-1)^2}$

2) $(4x-y)dx+(2y-x)dy=0$

3) $x^2-y^2+2xyy'=0$

ب) معادلات دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دوم

در مورد معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم حتی در حالت خاص معادلات خطی جواب دقیق را همیشه نمیتوان به دست آورد.

به هر حال در بسیاری موارد ممکن است نیازی به تعیین جواب دقیق یا تقریبی معادله دیفرانسیل نباشد و فقط بخواهیم اطلاعاتی درباره بعضی از خواص مهم جواب معادله دیفرانسیل به دست آوریم.

به طور مثال از آن جمله خواصی همچون تعادل ،پایداری ،تناوبی بودن و رفتار نوسانی جواب را می توان نام برد.

۰-۱-۱۲ مثال : معادله زیر یک معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دوم است.

$$\left[a(t)\psi(x(t))\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right]'+q(t)f(x(t))=0$$

که محور بحث ما در این پایان نامه است .

حال به یک نکته کاربردی نیز اشاره می کنیم .

۰-۱-۱۳ لم : اگر X ,Y نا منفی باشند آنگاه

$$X^q+(q-1)Y^q-qXY^{q-1}\geq 0 \qquad ,q>1$$

تساوی زمانی برقرار می شود که $X=Y$.

اثبات رجوع شود به [3] .

۰-۲ نکاتی از دنباله ها

۰-۲-۱ تعریف : چنانچه S مجموعه دلخواهی باشد یک دنباله در S تابعی است از مجموعه اعداد طبیعی N که بردش در S باشد .

۰-۲-۲ مثال : در حالت خاص ، دنباله ای در R^p تابعی است که دامنه آن N و برد آن در R^p است .

دنباله X را با نماد $X : N \to R^p$ برای $n \in N$ که مقادیرش $X(n) = x_n$ هستند نشان می دهیم , به طور نمادی $X(n) = (x_n : n \in N)$ و مجموعه مقادیرش $\{x_n : n \in N\}$ خواهد بود .

۰-۲-۳ تعریف : فرض کنیم $X(n) = x_n$ دنباله ای در R^p باشد ، عنصر x از R^p را حد X گوییم هر گاه به ازای هر همسایگی از x مانند V ، عددی طبیعی مانند k_v وجود داشته باشد که بازای هر $n \geq k_v$ ، x_n به V متعلق باشد .

۰-۲-٤ تعریف : اگر x حد X باشد می گوییم X به x همگرا است .

۰-۲-۵ قضیه : هر دنباله همگرا در R^p کران دار است .

اثبات رجوع شود به [7] .

۰-۳ نکاتی از زیر دنباله ها

۰-۳-۱ تعریف : اگر $X = (x_n)$ دنباله ای در R^p و

$$r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_n < \ldots$$

دنباله ای اکیدا صعودی از اعداد طبیعی باشد ، دنباله X' در R^p را که با $(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_n}, \ldots)$ داده شده است ، یک زیر دنباله X , نامیده می شود .

۰-۳-۲ قضیه : اگر دنباله X در R^p به عنصر x همگرا باشد آنگاه همه زیر دنباله های X به x همگرا خواهند بود .

اثبات رجوع شود به [7] .

۰-۳-۳ قضیه بولتسانو وایرشتراس : هر دنباله کران دار در R^p یک زیر دنباله همگرا دارد .

اثبات رجوع شود به [7] .

۰-٤ حدود بالایی و پایینی :

۰-٤-۱ تعریف : فرض کنیم S یک زیر مجموعه R باشد

الف)عنصر $u \in R$ را یک کران بالای S گوییم هر گاه بازای هر $s \in S$

$$s \leq u$$

ب) عنصر $w \in R$ را یک کران پایینی S گوییم هر گاه بازای هر $s \in S$

$$w \leq s$$

۰-٤-۲ تعریف : فرض کنید S یک زیر مجموعه R باشد در این صورت

الف)اگر S از بالا کران دار باشد آنگاه کران بالای S را زبرینه (یا کوچکترین کران بالای) S گوییم اگر این کران بالا از هر کران بالای دیگری کوچکتر باشد .

ب) اگر S از پایین کران دار باشد آنگاه کران پایین S را زیرینه (یا بزرگترین کران پایین) S گوییم اگر این کران پایین از هر کران پایین دیگری بزرگتر باشد .

۰-٤-۳ قرارداد : زبرینه و زیرینه S را در صورت وجود به ترتیب با

$$\inf S, \sup S$$

نشان می دهیم .

۰-٤-٤ تعریف : فرض کنیم $X = (x_n)$ دنباله کران داری در R باشد

الف)حد بالایی X که آن را با

$$\limsup (x_n)$$

نشان می دهیم عبارت است از زبرینه مجموعه V متشکل از تمام عناصر $v \in R$ به قسمی که حد اکثر به ازای تعداد با پایانی $n \in N$ داشته باشیم

$$v < x_n$$

ب)حد پایینی X که آن را با

$$\liminf (x_n)$$

نشان می دهیم عبارت است از زیرینه مجموعه W متشکل از تمام عناصر $w \in R$ به قسمی که حد اکثر به ازای تعداد با پایانی $m \in N$ داشته باشیم

$$x_m < w$$

۰-٤-٥ تذکر : با آنکه یک دنباله کران دار ملزم به داشتن حد نیست ، همیشه حد بالا و حد پایین یکتا دارد .

۰-٤-٦ تعریف : هر گاه S یک مجموعه غیر تهی در R باشد که از بالا کران دار نباشد تعریف می کنیم

$$\sup S = +\infty$$

و هر گاه T یک مجموعه غیر تهی در R باشد که از طرف پایین کران دار نباشد تعریف می کنیم

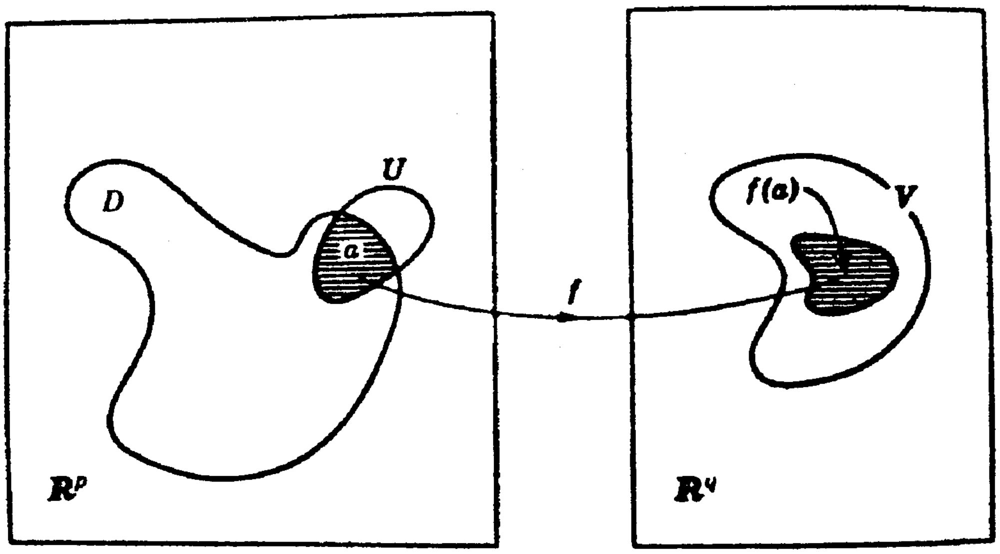
$$\inf T = -\infty$$

در نتیجه اگر $X = (x_n)$ دنباله ای در R باشد که از بالا کران دار نیست آنگاه

$$\limsup(x_n) = +\infty$$

و اگر $Y = (y_n)$ دنباله ای در R باشد که از پایین کران دار نیست آنگاه

$$\liminf(y_n) = -\infty$$



شکل ۰-۱.

۰-٤-۸ قضیه : هر گاه $X=(x_n)$ دنباله کران داری روی R باشد ، احکام زیر در مورد عدد حقیقی a هم ارز هستند :

الف) $a=\limsup(x_n)$

ب) هر گاه $\varepsilon>0$ ، حد اکثر تعداد با پایانی $n\in N$ وجود دارد به قسمی که $a+\varepsilon<x_n$ ، ولی تعداد بی پایانی $n\in N$ وجود دارد به قسمی که $a-\varepsilon<x_n$.

اثبات رجوع شود به [7] .

۰-۵ نکاتی از مفهوم پیوستگی

اگر فرض کنیم f تابعی باشد با دامنه D_f در R^p و برد R_f در R^q آنگاه

۰-۵-۱ تعریف : اگر $a\in D_f$، می گوییم f در a پیوسته است اگر بازای هر همسایگی $f(a)$ مانند V یک همسایگی a مانند U (وابسته به V) وجود داشته باشد به قسمی که برای هر عنصر دلخواهx از $U\cap D_f$ ، $f(x)$ عنصری از V باشد (با توجه به شکل ۰-۱) .

هر گاه $A\subseteq D_f$، می گوییم f در A پیوسته است در صورتی که f در هر نقطه A پیوسته باشد .

گاهی نیز گفته می شود که تابع پیوسته تابعی است که نقاط مجاور را به نقاط مجاور می فرستد ، البته این فقط یک تعبیر شهودی است که این تفکر را القا می کند که تصویر یک همسایگی a ، یک همسایگی $f(a)$ است .

فصل یک

نظریه نوسان

در این فصل به اهمیت بررسی خواص مهم یک معادله دیفرانسیل , بدون داشتن جواب های آن معادله , اشاره می کنیم و سپس به خاصیت مهم نوسان می پردازیم .

۱-۱ نظریه نوسان

۱-۱-۱ اهمیت بررسی خواص یک معادله دیفرانسیل

معادله خطی مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=o \qquad (1)$$

بدست آوردن جوابها ی معادله (۱)،به صورت کلاسیک، به ازای هر $P(x)$, $Q(x)$ ای ،همیشه امکان پذیر نیست.

این وضعیت ما را برآن می دارد که با طرح مساله در یک سطح بالاتر به دنبال دور نمایی گسترده تر باشیم و دریابیم که درک ماهیت و خواص جوابها ی معادله (۱) هدف والاتر ی است , چنانچه بتوان با استفاده از فرمولهای مقدماتی برای این جوابها به هدف مزبور دست یافت مراد حاصل است.

به عبارت دیگر بوسیله تحلیل مستقیم خود معادله و بدون داشتن عبارتهای رسمی برای جوابها ی معادله ، بتوان اطلاعات مفید و جالبی در مورد خواص جوابها بدست آورد .

۱-۱-۲ مثال : معادله زیر را در نظر بگیرید

$$y''+y=0 \qquad (2)$$

بخوبی می دانیم که دو جواب مستقل خطی معادله (۲) , به صورت های

$$\begin{cases} y_1=\sin x \\ y_2=\cos x \end{cases}$$

می باشند که در شرایط اولیه زیر صدق می کنند