دانشگاه سمنان
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر
((گروه ریاضی))

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

موضوع

معادلات تابعی ترکیبی متعامد روی فضاهای باناخ ناارشمیدسی

توسط:
ساناز بهبودی

استاد راهنما:
دکتر مجید اسحاقی گرجی

استاد مشاور:
دکتر رضا معمار باشی

اسفند ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

قدردانی

سپاس خدایی را که ستایشگران نمی‌توانند حق سپاسش را ادا کنند و حساب گران از شمارش نعمت های بی‌پایانش عاجزند، خدایی که نه کلام گنجایش تعریفش را دارد و نه زمان فرصت شمارششش را.

اکنون با لطف خدای مهربان، مرحله‌ای دیگر از دوران تحصیل را به پایان می‌رسانم، فرصت را مغتنم شمرده و بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر مهربانم که در تمام مراحل زندگی راهنما و مشوق من بوده اند سپاسگزاری کنم. و هچنین از همسرم که در مراحل تدوین این پایان نامه مرا یاری نمودند، کمال تشکر را دارم.

سپس از استاد راهنمای گرامی و ارجمندم جناب آقای دکتر مجید اسحاقی که در تمام مراحل پایان‌نامه با دقت و ژرف نگری، متانت، صبر و شکیبایی راهگشای کارم بودند، خالصانه تشکر و قدردانی می‌نمایم. بی‌شک بدون راهنمایی ارزشمند و حمایت ایشان، تکمیل این پایان نامه امکان پذیر نبود. از خداوند توانا، سلامت، سعادت و موفقیت روز افزون ایشان را خواستارم. همچنین از دکتر معمار باشی که زحمت مشاوره این پایان نامه را تقبل فرموده‌اند سپاسگزارم.

بهبودی

۱۳۹۲

چکیده

هدف اصلی در این پایان‌نامه پرداختن به پایداری هایرز-اولام-راسیاس معادلات ترکیبی شرطی روی فضای باناخ ناارشمیدسی و ضربگرهای متعامد روی جبر باناخ ناارشمیدسی است. همچنین حل و پایداری معادله شبه فیبوناچی $f(x) = f(x-۳) + f(x-۴)$ روی فضای باناخ نا ارشمیدسی را اثبات می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی:

پایداری هایرز-اولام-راسیاس، معادلات ترکیبی متعامد، فضای باناخ متعامد، معادله شبه فیبوناچی، فضای باناخ ناارشمیدسی، جبر باناخ ناارشمیدسی.

پیشگفتار

اولین بار مسئله پایداری [1] معادلات تابعی در سال ۱۹۴۰ میلادی، توسط اولام [2] [۴۳] به صورت زیر مطرح شد.

فرض کنیم $(G_1, \circ)$ یک گروه و $(G_2, *)$ یک گروه متریک با متریک $d(\cdot,\cdot)$ بوده و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. اگر نگاشت $h : G_1 \to G_2$ در رابطه

$$d(h(x \circ y), h(x) * h(y)) \leq \epsilon, \quad (x, y \in G_1)$$

صدق کند، آیا می توان همریختی $H : G_1 \to G_2$ را چنان یافت به قسمی که برای هر $x \in G_1$

$$d(h(x), H(x)) \leq \epsilon?$$

به عبارت دیگر تحت چه شرایطی می‌توان یک تقریبا همومورفیسم را به یک همومورفیسم نزدیک کرد؟ یک سال بعد هایرز [3] [۲۲] این مسئله را برای فضاهای باناخ به صورت زیر حل کرد.

اگر X و Y فضاهای باناخ، $\delta > 0$ و تابع $f : X \to Y$ برای هر $x, y \in X$ در نامعادله

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leq \delta$$

صدق کند، آن‌گاه برای هر $x \in X$ حد $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x)$ وجود دارد و A یک تابع جمعی

---

[1] stability

[2] Ulam

[3] Hyers

منحصربفرد است به‌طوری‌که برای هر $x \in X$،

$$\| f(x) - A(x) \| \leq \delta.$$

در سال ۱۹۵۰ میلادی، آوکی [۴] [۲] قضیه هایرز را برای توابع تقریبا جمعی تعمیم داد و در سال ۱۹۷۸ میلادی، تمستکلیس راسیاس [۵] [۳۶] قضیه هایرز را به صورت زیر تعمیم داد.

فرض کنیم $\epsilon > ۰$ و $۰ \leq p < ۱$ ثابت باشند و f یک تابع از فضای نرم دار X به فضای باناخ Y باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in X$

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leq \epsilon(\| x \|^p + \| y \|^p).$$

در این صورت برای هر $x \in X$ حد $A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲^n} f(۲^n x)$ وجود دارد و A یک تابع جمعی منحصر بفرد می‌باشد که در

$$\| f(x) - A(x) \| \leq \frac{۲\epsilon}{۲ - ۲^p} \| x \|^p \quad (x \in X),$$

صدق می‌کند. این مفهوم جدید به پایداری هایرز-اولام-راسیاس معروف است. گاورتا [۶] [۱۶] این نتایج را تعمیم داد او به جای تابع کنترل $\epsilon(\| x \|^p + \| y \|^p)$ در قضیه ی هایرز-اولام-راسیاس، تابع کنترل $\phi(x, y)$ را جایگزین کرد.

(برای جزئیات بیشتر [۴۱، ۳۹، ۳۸، ۳۷، ۲۸، ۲۵، ۱۷، ۱۵، ۴] را ببینید). در سال ۱۹۷۵

---

[۴] Aoki

[۵] Themistocles M .Rassias

[۶] Gavruta

میلادی، گادر [۷] و استرادر [۸][۲۰] معادله تابعی کوشی متعامد را معرفی کردند

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad x \perp y,$$

که $\perp$ را رابطه ای شامل پنج اصل در نظر گرفته‌اند. در سال ۱۹۸۵ میلادی، رتز [۹][۴۴] تعریف جدیدی از تعامد را با محدود کردن اصول گادر و استرادر معرفی کرد به‌علاوه او ساختار جدیدی از نگاشت های جمعی را نیز بیان نمود.

در سال ۱۹۸۷ میلادی، هنسل [۱۰][۲۱] فضاهای نرمدار ناارشمیدسی را تعریف کرده است که این فضاها کاربردهای فراوانی در فیزیک دارند [۴۶، ۴۵، ۳۳].

سازماندهی این پایان نامه به صورت زیر می‌باشد

فصل اول تعاریف مفاهیم و قضایای اولیه پایداری معادلات تابعی که در فصل‌های بعد نقش به سزایی دارند، بیان می‌شوند.

در فصل دوم ، تعمیم پایداری هایرز-اولام-راسیاس برای معادلات تابعی جمعی و درجه دوم روی فضای ناارشمیدسی [۱۱] ارائه می‌شود که مطالب این فصل از مرجع [۴۲] می‌باشند.

در فصل سوم، با استفاده از روش نقطه ثابت پایداری معادله تابعی جمعی-درجه دوم شرطی [۱۲] روی فضای باناخ [۱۳] ناارشمیدسی را بررسی می‌کنیم.

---

[۷] Gudder

[۸] Strawther

[۹] Rätz

[۱۰] Hensel

[۱۱] Non-Archimedean space

[۱۲] conditional

[۱۳] Banach

در فصل چهارم، با استفاده از روش نقطه ثابت پایداری و ابر پایداری ضربگرهای متعامد [۱۴] روی جبرهای باناخ ناارشمیدسی را بررسی می‌کنیم.

در فصل پنجم، حل [۱۵] عمومی و پایداری معادله تابعی شبه فیبوناچی [۱۶] $f(x) = f(x-۳) + f(x-۴)$ را در فضای باناخ ناارشمیدسی بررسی می‌کنیم.

(برای جزئیات بیشتر [۱۰، ۱۴، ۲۷، ۳۲، ۴۰، ۳۴، ۲۴، ۲۳، ۱۸، ۱۳، ۱۲] را ببینید).

مقالات زیر از این پایان نامه استخراج شده‌اند که در حال داوری می‌باشند.

[1] M.Eshaghi Gordji, S. Behboodi and S. Abbaszadeh, On the stability of a conditional Additive-quadratic functional equation in Non-Archimedean spaces.

[2] M.Eshaghi Gordji, S. Behboodi and S. Abbaszadeh, A fixed point approach to the stability of orthogonality multipliers on Non-Archimedean Banach algebras.

[3]M. Eshaghi Gordji, S. Behboudi and M. De La Sen, Solution and stability of Fibonacci like functional equation $f(x) = f(x-۳) + f(x-۴)$ on non-Archimedean spaces.

[۱۴] multiplier

[۱۵] soloution

[۱۶] Fibonacci like

فهرست مطالب

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل خلاصه ای از تعاریف و قضایای اساسی در مورد فضاهای باناخ و همچنین پایداری معادلات تابعی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است را می‌آوریم.

۱.۱ فضای باناخ

تعریف ۱.۱.۱. فضای برداری A روی میدان اسکالر F را نرمدار گوییم، هر گاه نگاشت $\| . \|: A \to F$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in A$ و هر اسکالر λ سه خاصیت زیر برقرار باشند

(۱) برای هر $x \in A$، $\| x \| \geq 0$ و $\| x \| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$ ؛

(۲) برای هر $x, y \in A$، $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ ؛

(۳) برای هر $x \in A$ و $\lambda \in F$، $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$.

در این صورت زوج $(A, \| . \|)$ را فضای نرمدار می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم $(A, \| . \|)$ یک فضای نرمدار باشد. زوج $(A, \| . \|)$ یک فضای باناخ

نامیده می‌شود هر گاه فضای متریک (A,d) با متریک $d(x,y)=\parallel x-y\parallel$ کامل باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم A یک مجموعه دلخواه باشد در این صورت تابع $d:A\times A\to[0,\infty]$ را متریک توسعه یافته گوییم هر گاه در شرایط زیر صدق کند

(۱) برای هر $x,y\in A$، $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$؛

(۲) برای هر $x,y\in A$، $d(x,y)=d(y,x)$؛

(۳) برای هر $x,y,z\in A$، $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

تذکر ۴.۱.۱. متریک توسعه یافته با متریک معمولی متفاوت است زیرا برد آن شامل بینهایت نیز می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم (A,d) یک فضای متریک توسعه یافته و $0\leq L\leq 1$ ثابت باشد. تابع $T:A\to A$ در شرط لیپشیتز [1] با ثابت لیپشیتز L صدق می‌کند هر گاه برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم $d(Tx,Ty)\leq Ld(x,y)$.

تذکر ۶.۱.۱. تابع T را یک تابع انقباضی گوییم هر گاه در شرط لیپشیتز صدق کند. به‌علاوه اگر ثابت لیپشیتز کمتر از ۱ باشد آنگاه تابع T یک تابع انقباضی اکید نامیده می‌شود .

تذکر ۷.۱.۱. در این بخش منظور از $\mathbb{F}$ همان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ می‌باشد مگر آن که یکی از آنها تاکید گردد.

تعریف ۸.۱.۱. فضای برداری A روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ را یک جبر گوییم، هرگاه نگاشت $\pi:(x,y)\to xy$، از $A\times A$ به توی A وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $x,y,z\in A$ و هر $\alpha\in\mathbb{F}$،

[1] Lipshitz

داشته باشیم

۱) $x(yz) = (xy)z$،

۲) $(x+y)z = xz + yz$، $x(y+z) = xy + yz$ و

۳) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.

تعریف ۹.۱.۱. جبر A را تعویض پذیر گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم $xy = yx$.

تعریف ۱۰.۱.۱. جبر A روی میدان F را یک جبر نرمدار گوییم هر گاه A بعنوان یک فضای برداری نرمدار با نرم $||\cdot||$ در شرط زیر صدق کند

$$||xy|| \leq ||x|| ||y|| \qquad (x, y \in A)$$

تعریف ۱۱.۱.۱. جبر نرمدار A روی میدان F را یک جبر باناخ گوییم هرگاه A فضای باناخ باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. اگر جبر A شامل عنصری مانند e باشد که به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $xe = ex = x$، آنگاه A را یک جبر یکدار و e را عضو یکه A می‌نامیم.

۲.۱ فضای نا ارشمیدسی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان باشد. قدر مطلق نا ارشمیدسی روی $\mathbb{K}$، یک تابع $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ است به‌طوری‌که برای هر $r, s \in \mathbb{K}$ داشته باشیم

(۱) $|r| \geq 0$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $r = 0$ ،

(۲) $|rs| = |r||s|$ و

(۳) $|r + s| \leq max\{|r|, |s|\}$ (نامساوی مثلث قوی).

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی روی میدان اسکالر $\mathbb{K}$ با قدر مطلق نابدیهی نا ارشمیدسی $|\cdot|$ باشد . تابع $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$ را نرم ناارشمیدسی می‌نامیم، اگر در شرایط زیر صدق کند

(۱) برای هر $x \in X$، $||x|| = 0$ اگر وتنها اگر $x = 0$ ،

(۲) برای هر $r \in \mathbb{K}$ و $x \in X$، $||rx|| = |r|||x||$ ،

(۳) برای هر $x, y \in X$ ، $||x + y|| \leq max\{||x||, ||y||\}$ (نامساوی مثلث قوی).

در این صورت $(X, ||.||)$ را فضای ناارشمیدسی می‌نامیم.

مهمترین مثال از فضاهای ناارشمیدسی اعداد p- جمعی هستند (مثال زیر را ببینید). مهمترین خاصیت اعداد p -جمعی این است که در اصل ارشمیدسی «برای هر $x, y > 0$ یک عددطبیعی n وجود دارد به طوری‌که $x < ny$» صدق نمی‌کنند.

مثال ۳.۲.۱. فرض کنید p عدد اول باشد. هر عدد گویای x مخالف صفر را می‌توان به صورت $x = \frac{a}{b}p^{n_x}$ نوشت به طوری‌که a و b اعداد صحیحی هستند که بر p بخش پذیر نیستند، قدرمطلق p- جمعی را به صورت $|x|_p := p^{-n_x}$ تعریف می‌کنیم. آن‌گاه $|.|$ یک قدرمطلق ناارشمیدسی روی Q است. Q کامل شده را نسبت به $|.|$ با Q_p نمایش می‌دهیم که میدان اعداد p- جمعی نامیده می‌شود. توجه کنید که اگر $p \geq 3$، آن‌گاه برای هر عدد صحیح n داریم $|2^n|_p = 1$.

تعریف ۴.۲.۱. با توجه به نامساوی

$$||x_n - x_m|| \leq max\{||x_{j+1} - x_j|| : m \leq j \leq n - 1\}(n \geq m)$$

یک دنباله $\{x_n\}$ کوشی است اگر وتنها اگر دنباله $\{x_{n+1} - x_n\}$ در فضای ناارشمیدسی به صفر همگرا باشد.

تعریف ۵.۲.۱. فضای نا ارشمیدسی را کامل می گوییم، اگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد. در بسیاری از کتب و مقالات فضای ناارشمیدسی کامل را فضای باناخ ناارشمیدسی می نامند و ما از این به بعد این اصطلاح را به کار می‌بریم.

۳.۱ فضای متعامد

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری با $dimX \geq 2$ و $\perp$ یک رابطه ی دوتایی روی X با خواص زیر باشد

(O_1) برای هر $x \in X$، $0 \perp x$ و $x \perp 0$،

(O_2) اگر $x, y \in X - \{0\}$ و $x \perp y$، آن‌گاه x, y مستقل خطی اند،

(O_3) برای هر $x, y \in X$ اگر $x \perp y$ آن‌گاه برای هر $\alpha, \beta \in R$، $\alpha x \perp \beta y$،

(O_4) اگر P یک زیر فضای ۲-بعدی از X، $x \in P$ و $\lambda \in R^+$ داده شده باشند، آن‌گاه $y_0 \in P$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \perp y_0$ و $x + y_0 \perp \lambda x - y_0$.

زوج $(X, \perp)$ یک فضای متعامد نامیده می‌شود.

مثال ۲.۳.۱. ۱) تعامد بدیهی روی فضای برداری X را با استفاده از خاصیت اول $\perp$ تعریف می‌کنیم و برای عناصر غیر صفر $x, y \in X$، $x \perp y$ اگر و تنها اگر x, y مستقل خطی باشند.

۲) تعامد متداول روی یک فضای ضرب داخلی $(X, \langle ., . \rangle)$، $x \perp y$ هر گاه $\langle x, y \rangle = 0$.

۳) تعامد بیرخف-جیمز [۲] روی یک فضای نرمدار $(X, \|.\|)$، $x \perp y$ هر گاه برای هر $\lambda \in R$ $\|x + \lambda y\| \geq \| x \|$.

تعریف ۳.۳.۱. اگر برای هر $x, y \in X$، $x \perp y$ نتیجه دهد که $y \perp x$، آن‌گاه رابطه $\perp$ را یک تعامد متقارن می‌نامیم.

به وضوح مثال های (۱) و (۲) متقارن هستند اما مثال (۳) متقارن نیست. لازم به ذکر است که فضای نرمدار حقیقی با بعد بزرگتر یا مساوی ۲، یک فضای ضرب داخلی است هر گاه تعامد بیرخف-جیمز در آن متقارن باشد.

۴.۱ پایداری معادلات تابعی

معادله $f(x+y) = f(x) + f(y)$ یک معادله تابعی معروف و شناخته شده است که آن را معادله کوشی [۳] می‌نامیم و هر جواب از این معادله یک تابع جمعی نامیده می‌شود. برای توابع حقیقی مقدار، هر جواب اندازه پذیر لبگ از معادله فوق به صورت $f(x) = cx$ می‌باشد که در آن c عددی ثابت است.

پایداری معادله های تابعی اولین بار برای معادله کوشی مطرح شده است و بعد از آن روی معادلات تابعی دیگر مطرح شد و هم اکنون تحقیقات گسترده ای در این زمینه روی فضاهای مختلف انجام می‌گیرد.

تذکر ۱.۴.۱. در این بخش X، X_1 و X_2 را فضای برداری نرمدار حقیقی و Y را فضای باناخ در

[۲] Birkhoff - James

[۳] Cauchy

نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنیم $\epsilon > 0$ و تابع $f : X \to Y$ داده شده باشند. تابع f را ϵ- جمعی می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon.$$

قضیه ۳.۴.۱. تابع $f : X_1 \to X_2$ بین فضاهای نرمدار حقیقی

۱)درجه دوم است یعنی در معادله تابعی

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

صدق می‌کند اگروفقط اگر یک تابع دو-جمعی متقارن و منحصر بفرد $B_1 : X_1 \times X_1 \longrightarrow X_2$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $x \in X_1$، $f(x) = B_1(x, x)$.

و هم‌چنین تابع دو جمعی B_1 با ضابطه $B_1(x, y) = \frac{1}{4}[f(x+y) - f(x-y)]$ مشخص می‌شود.

۲)درجه سوم است یعنی در معادله تابعی

$$f(2x+y) + f(2x-y) = 2f(x+y) + 2f(x-y) + 12f(x)$$

صدق می‌کند اگروفقط اگر تابع منحصر بفرد $C : X_1 \times X_1 \times X_1 \longrightarrow X_2$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $x \in X_1$، $f(x) = C\big((x, x, x)\big)$ و تابع C با ثابت نگه داشتن یکی از متغیرها روی دو متغیر دیگر متقارن باشد و با ثابت نگه داشتن هر دو متغیر روی متغیر دیگر جمعی باشد.

و هم‌چنین تابع C با ضابطه $C\big((x,y,z)\big) = \frac{1}{24}[f(x+y+z)+f(x-y-z)-f(x+y-z)-f(x-y+z)]$ مشخص می‌شود.

۳)درجه چهارم است یعنی در معادله تابعی

$$f(2x+y)+f(2x-y) = 4(f(x+y)+f(x-y)) + 24f(x) - 6f(y)$$

صدق می‌کند اگروفقط اگر تابع دو-درجه دوم متقارن و منحصر بفرد $B_2 : X_1 \times X_1 \longrightarrow X_2$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X_1$، $f(x) = B_2\big((x,x)\big)$.

تابع دو-درجه دوم B_2 با ضابطه $B_2\big((x,y)\big) = \frac{1}{12}[f(x+y)+f(x-y)-2f(x)-2f(y)]$ مشخص می‌شود.

برهان. برای اثبات (۱)، (۲)، (۳) به ترتیب به مراجع [۱]، [۳۱] و [۳۳]رجوع کنید. □

قضیه ۴.۴.۱. (هایرز-اولام) فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. اگر تابع $f : X \to Y$، ϵ- جمعی باشد. آن‌گاه تابع یکتای جمعی $A : X \to Y$ که به صورت

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x).$$

برای هر $x \in X$ تعریف می‌شود وجود دارد به طوری‌که برای هر $x \in X$،

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \epsilon.$$

برهان. بنا بر فرض، برای هر $x, y \in X$ داریم

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon. \tag{۱.۱}$$

اگر در (۱.۱) به جای y مقدار x قرار دهیم برای هر $x \in X$ خواهیم داشت

$$\|f(۲x) - ۲f(x)\| \leq \epsilon. \tag{۲.۱}$$

اگر (۱.۲) را بر ۲ تقسیم کنیم برای هر $x \in X$ داریم

$$\|\frac{f(۲x)}{۲} - f(x)\| \leq \frac{\epsilon}{۲}. \tag{۳.۱}$$

اکنون در (۳.۱) به جای x مقدار $۲x$ قرار داده و نتیجه را بر ۲ تقسیم می‌کنیم برای هر $x \in X$ بدست می‌آوریم

$$\|\frac{f(۲^۲x)}{۲^۲} - \frac{f(۲x)}{۲}\| \leq \frac{\epsilon}{۲^۲}. \tag{۴.۱}$$

با استفاده از روابط (۳.۱) و (۴.۱)، برای هر $x \in X$ داریم

$$\|\frac{f(۲^۲x)}{۲^۲} - f(x)\| \leq \epsilon(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲}) = \epsilon(۱ - ۲^{-۲}). \tag{۵.۱}$$

با ادامه روند فوق به استقراء ریاضی برای هر $x \in X$ خواهیم داشت

$$\|۲^{-n}f(۲^nx) - f(x)\| \leq \epsilon(۱ - ۲^{-n}). \tag{۶.۱}$$