دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

α - احاطه گری در گراف ها

نگارش
زینب علی بیگی

استاد راهنما
دکتر نادر جعفری راد

شهریور ۱۳۹۰

قدردانی

تشکر و سپاس خداوندی را که فراگیری علم و دانش را تا این مقطع برای اینجانب فراهم ساخت. هر چند واژه ها را یارای آن نیست که لطف و محبت کسانی را مه در تمام دوران زندگیم جرعه نوش دریای مهر و محبتشان بوده ام به تصویر بکشم، اما به رسم ادب و احترام بوسه بر دستانشان زده و بر خود واجب می دانم از زحمات مستمر و بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر نادر جعفری راد که با راهنمایی های ارزنده خویش نقش مهمی در به ثمر رساندن این پایان نامه داشته اند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم، همچنین از استاد مشاورم آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف کمال تشکر را دارم از اساتید محترم آقایان دکتر بهزاد صالحیان و دکتر علیرضا ناظمی که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل نمودند صمیمانه تشکر و قدردانی می کنم.

چکیده

فرض کنید $G=(V,E)$گرافی با n رأس و m یال و فاقد رأس تنها باشد و فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ عددی حقیقی باشد. زیر مجموعه S از رئوس G را یک مجموعه α-احاطه گر نامیم، هرگاه برای هر رأس $v \in V-S$، $|N(v) \cap S| \geq \alpha|N(v)|$. کوچکترین اندازه یک مجموعه α -احاطه گر در گراف G را عدد α -احاطه گری G نامیده وآن را با $\gamma_\alpha(G)$ نشان می دهیم.

درفصل اول این پایان نامه مفاهیم و مقدمات نظریه گراف که در فصل های بعد به آنها نیازمندیم را یاد آوری می کنیم.

در فصل دوم مفهوم α - احاطه گری را به طور کامل بررسی خواهیم کرد و کران هایی قابل دسترس برای آن معرفی می کنیم.

در فصل سوم مفهوم α - احاطه گری را تعمیم می دهیم و آن را α - احاطه گری کلی می نامیم و مطالعه نسبتا جامعی در خصوص این موضوع جدید خواهیم داشت و کران هایی قابل دسترس برای آن پیدا خواهیم کرد.

فصل چهارم تأثیر حذف و افزایش یک یال و کاهش یک رأس را بر عدد α - احاطه گری بررسی می کنیم. همچنین گراف های بحرانی را تعریف کرده و آن ها را دسته بندی می کنیم.

نتایج حاصله در فصل های سوم و چهارم برای اولین بار در این پایان نامه انجام شده است.

واژه‌های کلیدی: احاطه گر، α - احاطه گر، α - احاطه گری کلی، گراف های بحرانی

فهرست مطالب

فصل ۱

۱.۱ مقدمه

در دنیای اطراف ما، مسائل فراوانی وجود دارند که می توان توسط نموداری متشکل از یک مجموعه نقاط، به علاوه ی خطوطی که برخی از این نقاط را به یکدیگر متصل می کنند، به توصیف آن ها پرداخت. به عنوان مثال، برای نشان دادن رابطه دوستی بین یک دسته از انسان ها می توانیم هر شخص را با یک نقطه مشخص کنیم رابطه دوستی بین افراد را با یک خط متصل بین آن نقاط مشخص کنیم. توجه داشته باشید که در این گونه نمودارها، آنچه بیشتر مورد توجه است این است که آیا دو نقطه داده شده به وسیله یک خط به یکدیگر متصل هستند یا نه، و طریقه اتصال آنها اهمیتی ندارد.

در این فصل به تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه گراف می پردازیم و برای تعاریف و مفاهیم دیگری که در اینجا ذکر نمی شود خواننده را به مراجع [۱، ۱۷] ارجاع می دهیم. همچنین با مفاهیم احاطه گری و احاطه گری کلی آشنا شده و برخی از قضایا و نتایج مورد استفاده در فصل های بعد را مطرح می کنیم.

۲.۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. گراف G یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \Psi_G)$، متشکل از مجموعه ناتهی $V(G)$ی رأس ها، مجموعه $E(G)$ی یال های مجزا از $V(G)$، و تابع وقوع Ψ_G است که با هر یال G، یک جفت نامرتب (نه لزوما مجزا) از رأس های G را همراه می کند. اگر e یک یال و u و v رأس هایی باشند، به قسمی که $\Psi_G(e) = uv$، آنگاه می گویند e، u را به v وصل می کند، رأس های u و v را دو انتهای e می نامند.

در سراسر این پایان نامه، گرافG را به صورت یک دوتایی مرتب $(V(G), E(G))$ معرفی می کنیم که از یک مجموعه ناتهی $V(G)$ موسوم به مجموعه رأس ها و مجموعه $E(G)$ موسوم به مجموعه یال ها تشکیل شده است.

حرف G نشان دهنده ی یک گراف است و برای سهولت به جای $V(G)$ و $E(G)$، به ترتیب از V و E استفاده می کنیم.

تعریف ۲.۲.۱. یک گشت به طول k، یک دنباله ی متناوب $v_۰, e_۱, v_۱, e_۲, ...e_k, v_k$ از رأس ها و یال ها است، به طوری که به ازای هر i، $e_i = v_{i-۱}v_i$ یک یال باشد. یک گذر گشتی است که هیچ یال تکراری نداشته باشد.

تعریف ۳.۲.۱. یک مسیر گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به صورت فهرست مرتبی از رأس های متمایز $v_۱, v_۲, ..., v_n$ در نظر می گیریم، به طوری که به ازای هر $۲ \leq i \leq n$، $v_{i-۱}v_i$ یک یال باشد.

تعریف ۴.۲.۱. یک دور گذر بسته ای به طول حدأقل یک است که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری دیگری نداریم. یک دور را به صورت

فهرست مرتبی از $v_۱, v_۲, ..., v_n$ در نظر می گیریم، به طوری که به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $v_{i-۱}v_i$ یک یال باشد. (یک طوقه دوری به طول یک است).

تعریف ۵.۲.۱. یک گراف، ساده است اگر هیچ طو قه ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن، بیش از یک یال موجود نباشد.

تعریف ۶.۲.۱. درجه رأس v در G تعداد یال های G است که v بر آن ها واقع است و آن را با $deg(v)$ نمایش می دهیم. بزرگترین درجه در میان درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچکترین درجه را با $\delta(G)$ نمایش می دهیم. گراف G، k - منتظم نامیده می شود هرگاه درجه هر رأس آن، k باشد.

تعریف ۷.۲.۱. مجموعه ای از رئوس که با رأس v ازگراف G مجاور باشند را همسایگی باز رأس v نامیده و و آنرا با $N(v)$ نمایش می دهیم. همسایگی باز زیرمجموعه S از رئوس گراف G را به صورت $\cup_{v\in S}N(v)$ تعریف می کنیم و آن را با $N(S)$ نمایش می دهیم. $N(v) \cup v$ را همسایگی بسته رأس v نامیده و آنرا با $N[v]$ نمایش می دهیم. همچنین همسایگی بسته زیر مجموعه S از رئوس گراف G را به صورت $\cup_{v\in S}N[v]$ تعریف می کنیم، و آن را با $N[S]$ نمایش می دهیم.

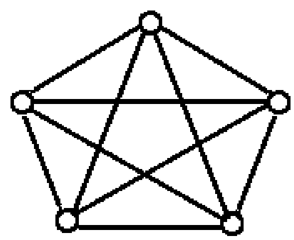
تعریف ۸.۲.۱. گراف G همبند نامیده می شود هرگاه به ازای هر دو رأس متمایز u و v از G مسیری از u به v موجود باشد. (یا یک (u, v) - مسیر موجود باشد)

تعریف ۹.۲.۱. فاصله بین دو رأس v و u در گراف G که با $d_G(u, v)$ نمایش داده می شود، عبارت است از طول کوتاهترین (u, v) - مسیر در گراف G. قطر گراف G برابر است با بیشترین فاصله بین دو رأس از G و با $diam(G)$ نمایش داده می شود.

قضیه ۱.۲.۱۰. [۱] در هر گراف G با m یال، $\sum_{v\in V} deg(v) = ۲m$.

تعریف ۱.۲.۱۱. گرافی که در آن هر دو رأس متمایز توسط یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، گراف کامل نامیده می شود. یک گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می دهیم. همچنین منظور از P_n و C_n به ترتیب یک مسیر و یک دور n رأسی می باشد.

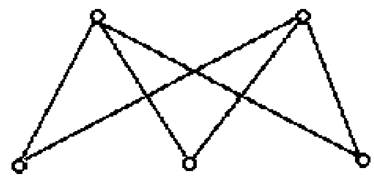
شکل ۱.۱ گراف کامل $K_۵$ را نشان می دهد.



شکل ۱.۱: گراف کامل $K_۵$

تعریف ۱.۲.۱۲. گراف دو بخشی گرافی است که مجموعه رأس های آن به دو زیر مجموعه X و Y چنان افرازشود، که یک سر تمام یال های G در X و سر دیگر آن ها در Y باشد. یک گراف دو بخشی با بخش های X و Y، که در آن هر رأس X، به هر رأس Y وصل شده باشد گراف دو بخشی کامل نامیده می شود. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$ آنگاه گراف دو بخشی کامل با بخش های X و Y را با $K_{m,n}$ نمایش می دهیم. گراف k - بخشی، گرافی است که می توان مجموعه رأس های آن را به k زیرمجموعه طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک زیر مجموعه نباشد. گراف k - بخشی کامل، یک گراف k - بخشی است که در آن، هر رأس یک بخش به تمام رأس هایی که در بخش های دیگر قرار دارند، وصل شده باشد.

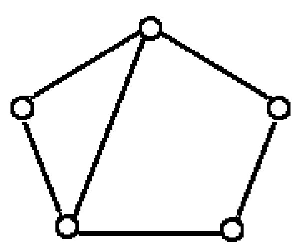
شکل ۲.۱ گراف دو بخشی کامل $K_{۲,۳}$ را نشان می دهد.



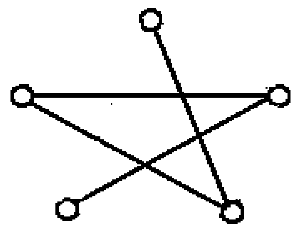
شکل ۲.۱: گراف دو بخشی کامل $K_{۲,۳}$

تعریف ۱۳.۲.۱. یک زیرگراف از گراف G، گرافی مانند H است که $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ به طوری که $V(H) \neq \emptyset$.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید G گرافی n رأسی باشد، متمم (یا مکمل) گراف G را با $\bar{G}$ نشان داده و به این صورت تعریف می کنیم: $V(G) = V(\bar{G})$ و هر دو رأس مانند u و v در $\bar{G}$ مجاور هستند، اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند. شکل های ۳.۱و ۴.۱ گراف G و متمم آنرا نشان می دهند.



شکل ۳.۱:



شکل ۴.۱:

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید S زیر مجموعه ناتهی از V باشد. زیر گراف G را که مجموعه رأس هایش S و مجموعه یال هایش، زیر مجموعه ای از یال های G باشد که هر دو انتهایش در S قرار دارد، زیر گراف القا شده به وسیله S نامیده و با $G[S]$ نمایش می دهند.

تعریف ۱۶.۲.۱. گراف همبندی که فاقد دور باشد درخت نام دارد. یک برگ (رأس آویزان) رأسی از درجه یک است. یک رأس تنها، رأسی است که دارای درجه صفر باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱. رأسی که در همسایگی یک برگ باشد رأس پشتیبان نام دارد . مجموعه رئوس پشتیبان گراف G را با $S(G)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۸.۲.۱. گراف های G و H را در نظر بگیرید. حاصلضرب دکارتی آنها را که به صورت $G\Box H$ می نویسیم، گرافی با مجموعه رأس های $V(G)\times V(H)$ می باشد که در آن رأس (u,v) مجاور با رأس (u',v') است اگر و تنها اگر یکی از دو حالت زیر برقرار باشد:

۱) $u=u'$ و $vv'\in E(H)$

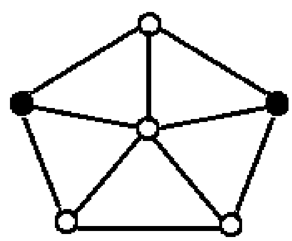
۲) $v=v'$ و $uu'\in E(G)$

تعریف ۱۹.۲.۱. زیر مجموعه ای از یال های گراف G که هیچ دو تایی از آنها رأس مشترکی نداشته باشند تطابق نام دارد. اگر M یک تطابق در G باشد و x رأسی روی یکی از یالهای M

باشد گوییم M، x را اشباع می کند. اگر هر رأس از گراف G توسط تطابق M اشباع شود M را تطابق کامل می نامیم.

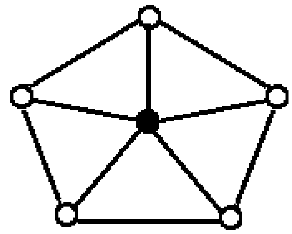
تعریف ۲۰.۲.۱. زیر مجموعه S از رئوس گراف G را یک مجموعه مستقل می نامیم، هرگاه هیچ دو رأسی در مجموعه S مجاور نباشند، یعنی برای هر رأس $v \in S$ داشته باشیم $|N(v) \bigcap S| = ۰$. مجموعه مستقل S را ماکسیمال می نامیم، هرگاه نتوان هیچ رأس جدید مانند v را به S اضافه کرد به طوری که $S \cup \{v\}$ نیز مستقل باشد.

اندازه بزرگترین مجموعه مستقل ماکسیمال از رئوس گراف G را با $\beta(G)$ نمایش می دهیم. شکل ۵.۱ بزرگترین مجموعه مستقل ماکسیمال را نشان می دهد.



شکل ۵.۱: $\beta(G) = ۲$

اندازه کوچکترین مجموعه مستقل ماکسیمال از رئوس گراف G را با $i(G)$ نمایش می دهیم. شکل ۶.۱ کوچکترین مجموعه مستقل ماکسیمال را نشان می دهد.



شکل ۶.۱: $i(G) = 1$

تعریف ۲۱.۲.۱. زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک مجموعه غیر زائد گوییم، هرگاه برای هر $x \in S$ ، رأسی مانند $y \in N[x]$ وجود داشته باشد، به طوری که

$$y \notin S - \{x\} \text{ و } |N(y) \bigcap (S - \{x\})| = 0.$$

اندازه بزرگترین مجموعه غیر زائد ماکسیمال از رئوس گراف G را با $IR(G)$ نمایش می دهیم.

اندازه کوچکترین مجموعه غیر زائد ماکسیمال از رئوس گراف G را با $ir(G)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲۲.۲.۱. اندازه کوچکترین زیر مجموعه S از رئوس گراف G، به طوری که هر یال G حدأقل یک سر در S داشته باشد را عدد پوشش رأسی G نامیده و آنرا با $\alpha_0(G)$ نمایش می دهیم.

در سال ۱۹۵۹ گالای [1] [۷] رابطه زیر را ارائه نمود.

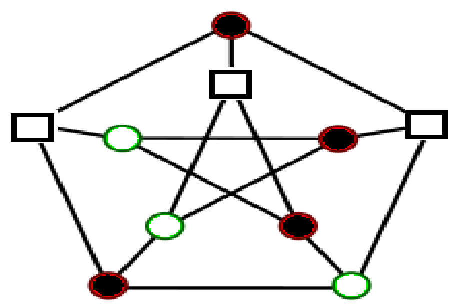
قضیه ۲۳.۲.۱. برای هر گراف G، $\beta(G) + \alpha_0(G) = n$.

[1] Gallai

تعریف ۲۴.۲.۱. یک k - رنگ آمیزی واقعی از گراف G تابعی است مانند $f : V(G) \to C$ که $C = \{۱, ۲, ..., k\}$ و به ازای هر دو رأس مجاور مانند x, y، $f(x) \neq f(y)$. عدد رنگی گراف G که با $\chi(G)$ نشان داده می شود، عبارت است از حدأقل تعداد k، به طوری که G دارای یک k -رنگ آمیزی واقعی باشد.

توجه کنید که رأس های هم رنگ در یک رنگ آمیزی واقعی گراف G، مجموعه ی مستقل تشکیل می دهند. لذا $\chi(G)$ با کمترین تعداد مجموعه های مستقل برای پوشش $V(G)$ برابر است.

شکل ۷.۱ رنگ آمیزی گراف پترسن را نشان می دهد.



شکل ۷.۱: $\chi(G) = ۳$

قرارداد: $\lfloor n \rfloor$ و $\lceil x \rceil$ را به ترتیب برای نمایش کف و سقف x به کار می بریم، $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x است و $\lceil x \rceil$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با x است.

قضیه ۲۵.۲.۱. [۹] اگر P_n مسیری با n رأس باشد، آنگاه $\alpha_۰(P_n) = \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$.

قضیه ۲۶.۲.۱. [۹] اگر C_n دوری با n رأس باشد، آنگاه $\alpha_۰(C_n) = \lceil \frac{n}{۲} \rceil$.

۳.۱ احاطه گری

در سال های اخیر، مفهوم احاطه گری در گراف ها به دلیل کاربردهای زیاد آن در زمینه های مختلف همچون علوم کامپیوتر و شبکه های الکترونیکی مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته و رشد چشمگیری داشته است. این مفهوم برای نخستین بار در سال ۱۸۶۲ توسط دوجکنیش [۲] روی صفحه شطرنج مورد استفاده قرار گرفت. اما بعدها به عنوان یک بحث نظری در نظریه گراف ها بررسی و مطالعه گردید و تا کنون مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است.

در سال ۱۸۶۲ بال [۳] [۱۵] مسأله کمترین تعداد مهره های وزیر مورد نیاز جهت قرار گرفتن روی صفحه شطرنج را به قسمی که هر خانه ای مورد حمله یک وزیر قرار گرفته و هیچ وزیری مورد حمله وزیر دیگری نباشد، مطرح کرد. این مسأله به مسأله ۵ - وزیر مشهور شد. ازجمله کاربردهای دیگر آن می توان درمخابرات برای نصب دکل های آنتن در مناطقی از شهر یا انتخاب بهترین مکان ها برای احداث بیمارستان یا مراکز آتش نشانی و...اشاره نمود. به عنوان مثال فرض کنید قرار است در مناطقی از شهر دکل های مخابرات نصب شود به طوری که به تمامی نقاط شهر آنتن دهی مناسب انجام شده و همچنین از نظر اقتصادی نیز مقرون به صرفه باشد. یعنی با انتخاب کمترین نقاط برای نصب دکل به هدف مورد نظر دست یابیم. برای این منظور مناطق مختلف شهر را به عنوان رئوس گراف در نظر می گیریم و با توجه به برد آنتن دهی، در صورت نصب دکل در هر منطقه، آن مناطقی که آنتن دهی می شوند را با خطوطی به آن متصل می کنیم و به این ترتیب یال های گراف مورد نظر را رسم کرده و گرافی طراحی می کنیم. حال به دنبال کمترین تعداد رأس از گراف هستیم، به طوری که

[۲] De Jacnish

[۳] w. w. Rouse Ball

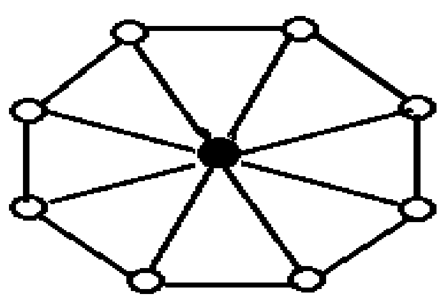
تمامی رئوس بیرونی را تحت پوشش قرار دهد.

تعریف ۱.۳.۱. زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه گر می نامیم، هرگاه برای هر رأس $v \in V - S$، $|N(v) \bigcap S| \geq ۱$. معادل تعریف فوق به این صورت می باشد که $N[S] = V(G)$.

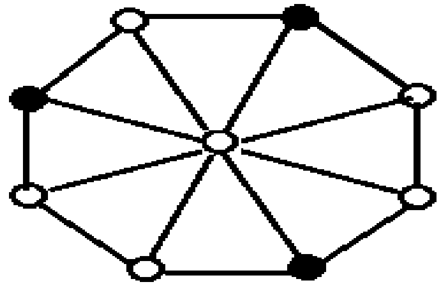
کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه گر در گراف G را عدد احاطه گری G نامیده و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می دهیم.

بزرگترین اندازه یک مجموعه احاطه گر مینیمال در گراف G را عدد احاطه گری بالای G نامیده و با $\Gamma(G)$ نمایش می دهیم.

شکل ۸.۱ کوچکترین مجموعه احاطه گر و شکل ۹.۱ بزرگترین مجموعه احاطه گر مینیمال گراف مورد نظر را نشان می دهد.



شکل ۸.۱: $\gamma(G) = ۱$



شکل ۹.۱: $\Gamma(G) = 3$

قضیه ۲.۳.۱. [۹] اگر P_n مسیری با n رأس و C_n دوری با n رأس باشد، آنگاه

$$\gamma(P_n) = \gamma_(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$$

قضیه ۳.۳.۱. هر مجموعه احاطه گر مینیمال یک مجموعه غیر زائد ماکسیمال است.

اثبات. فرض کنید زیر مجموعه S از رئوس گراف G یک مجموعه احاطه گر مینیمال باشد. بنابراین طبق تعریف مجموعه احاطه گر برای هر رأس $v \in V - S$، $|N(v) \bigcap S| \geq 1$. حال به برهان خلف حکم را ثابت می کنیم. فرض کنید رأسی مانند x وجود داشته باشد به طوری که $x \in S$ و برای هر $y \notin S - \{x\}$ و $y \in N[x]$ و $|N(y) \cap S - \{x\}| \neq 0$ در نتیجه حدأقل دو همسایگی در مجموعه S موجود می باشد. بنابراین می توان x را حذف کرد. زیرا تمام رئوس موجود در همسایگی x حدأقل توسط یک رأس دیگر در S احاطه می شوند. لذا $S - \{x\}$ نیز یک مجموعه احاطه گر می باشد که با فرض مسأله در تناقض است. بنابراین هر مجموعه احاطه گر مینیمال یک مجموعه غیر زائد است. حال نشان می دهیم مجموعه احاطه گر مینیمال S یک مجموعه غیر زائد ماکسیمال است. (برهان خلف) فرض کنید مجموعه S غیر زائد ماکسیمال نباشد بنابراین رأسی مانند z وجود دارد به طوری که $S \cup \{z\}$ غیر زائد

است. این مجموعه را S' می نامیم. بنابراین برای $z \in S'$ وجود دارد $y \in N[z]$ به طوری که $y \notin S' - \{z\}$ و $|N(y) \cap S' - \{z\}| = ۰$. لذا $|N(y) \cap S| = ۰$. بنابراین مجموعه S احاطه گر نمی باشد و این با فرض مسأله در تناقض است. □

قضیه ۴.۳.۱. هر مجموعه مستقل ماکسیمال یک مجموعه احاطه گر مینیمال است.

اثبات. فرض کنید زیر مجموعه S از رئوس گراف G یک مجموعه مستقل ماکسیمال باشد. بنابراین هر رأس خارج از مجموعه S مانند x، توسط حدأقل یک رأس در مجموعه S احاطه می شود. زیرا اگر چنین نباشد، آنگاه آن رأس نسبت به رئوس موجود در مجموعه S مستقل خواهد بود و با اضافه شدن آن رأس به مجموعه S، مجموعه $S \cup \{x\}$ مجموعه ای مستقل خواهد بود و این با فرض مسأله در تناقض می باشد، زیرا مجموعه S مستقل ماکسیمال است. بنابراین مجموعه S احاطه گر می باشد. حال ثابت می کنیم مجموعه S احاطه گر مینیمال می باشد. (برهان خلف) فرض کنید مجموعه S احاطه گر مینیمال نباشد. بنابراین رأسی مانند y در مجموعه S وجود دارد، به طوری که مجموعه $S - \{y\}$ احاطه گر می باشد. این مجموعه را S' می نامیم. بنابراین رأس y باید توسط رأسی در S' مانند z احاطه شود. لذا z و y مجاور می باشند و این با فرض مسأله که مجموعه S مستقل ماکسیمال است، در تناقض می باشد. □

با توجه به قضیه ۳.۳.۱ و با توجه به این که $IR(G)$ بزرگترین مجموعه غیرزائد ماکسیمال است داریم $\Gamma(G) \leq IR(G)$. همچنین با توجه به اینکه $ir(G)$ کوچکترین مجموعه غیرزائد ماکسیمال است داریم $ir(G) \leq \gamma(G)$. با توجه به قضیه ۴.۳.۱ و با توجه به اینکه $\Gamma(G)$ بزرگترین مجموعه احاطه گر مینیمال می باشد، داریم $\beta(G) \leq \Gamma(G)$. همچنین با توجه به اینکه $\gamma(G)$ کوچکترین مجموعه احاطه گر مینیمال می باشد، داریم $\gamma(G) \leq i(G)$

و طبق تعریف مجموعه مستقل ماکسیمال $i(G) \leq \beta(G)$. بنابراین [۳]

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G)$$

قضیه ۵.۳.۱. برای هر یال e در گراف G، $\gamma(G) \leq \gamma(G-e)$.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma(G-e)$ - مجموعه و $e = xy$ یال دلخواهی باشد. اگر $\{x, y\} \subseteq S$، آنگاه S یک مجموعه احاطه گر برای گراف G می باشد. زیرا با اضافه شدن یال xy به مجموعه S و با توجه به تعریف احاطه گری، مجموعه S همچنان رئوس خارجی را احاطه می کند. لذا $\gamma(G) \leq \gamma(G-e)$. اگر $\{x, y\} \nsubseteq S$ آنگاه به وضوح S یک مجموعه احاطه گر برای گراف G می باشد. لذا $\gamma(G) \leq \gamma(G-e)$. اگر $x \in S$ و $y \notin S$، آنگاه با اضافه شدن یال $e = xy$ مجموعه S یک مجموعه احاطه گر برای گراف G می باشد. لذا $\gamma(G) \leq \gamma(G-e)$.

□

مسأله ی احاطه گری در دهه های گذشته در بیش از ۸۰ نوع شاخه تقسیم بندی شده و گسترش فراوانی داشته است. از جمله آنها می توان به احاطه گری کلی [۴] و α - احاطه گری [۵] و احاطه گری k-لایه [۶] و احاطه گری زوج [۷] اشاره نمود. در این پایان نامه درباره α - احاطه گری به طور مفصل بحث خواهیم کرد. همچنین پارامتر جدیدی به نام α - احاطه گری کلی [۸] برای اولین بار مورد مطالعه واقع خواهد شد که لازم است قبل از مطرح کردن آنها مطالبی را در خصوص احاطه گری کلی بیان نماییم.

---
[۴] total- domination
[۵] α-domination
[۶] k-tuple-domination
[۷] paired-domination
[۸] total-α-domination

۴.۱ احاطه گری کلی

در سال ۱۹۸۰ به دنبال حل مسأله ۵ - وزیر، هدتنیمی [۹] و داوز [۱۰] و کوکین [۱۱] مسأله احاطه گری کلی را در مقاله ای تحت عنوان "احاطه گری کلی در گراف" [۲] مطرح کردند.

فرض کنید ساخت بیمارستان در نقاط مختلف شهر مورد نظر باشد و هدف به گونه ای باشد که هر بیمارستان حدأقل توسط یک بیمارستان دیگر پوشش داده شود تا در صورت کمبود امکانات پزشکی، از آن بیمارستان کمک گرفته شود. بدین منظور گراف مورد نظر را به همان صورت ذکر شده در مثال های قبل طراحی کرده و با استفاده از مسأله ی احاطه گری کلی آن را بررسی می کنیم.

تعریف ۱.۴.۱. زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه گر کلی می نامیم، هرگاه برای هر رأس $v \in V$، $|N(v) \bigcap S| \geq ۱$. معادل این تعریف به این صورت می باشد که $N(S) = V(G)$.

کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه گر کلی در گراف G را عدد احاطه گری کلی G نامیده و آن را با $\gamma_t(G)$ نمایش می دهیم. بزرگترین اندازه یک مجموعه احاطه گر کلی مینیمال در گراف G را عدد احاطه گری کلی بالای G نامیده و با $\Gamma_t(G)$ نمایش می دهیم.

شکل ۱۰.۱ کوچکترین مجموعه احاطه گر کلی و شکل ۱۱.۱ بزرگترین مجموعه احاطه گر کلی مینیمال را نشان می دهد.

[۹] S. T. Hedetniemi
[۱۰] R. M. Dawes
[۱۱] Cockayne