١٠٧٩٤٩

۸۷/۱۰/۵۷۷۷
۸۷/۱۱/۳

دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در ریاضی کاربردی- گرایش تحقیق در عملیات

عنوان:

تحلیل پوششی داده با عوامل غیر قابل کنترل

استاد راهنما:
دکتر عباسعلی نورا

۱۳۸۷ /۹/ ۲۳

تحقیق و نگارش:
سهیلا حسن لی

بهار ۸۷

۱۰۷۹۴۹

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان تحلیل پوششی داده ها با عوامل غیر قابل کنترل قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) توسط دانشجو سهیلا حسن لی تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکتر عباسعلی نورا تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

سهیلا حسن لی

این پایان نامه ..۶... واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ ..۸۷/۳/۲۹.. توسط هیئت داوران بررسی و درجه ..عالی.. به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ
استاد راهنما:	دکترعباسعلی نورا		
داور ۱:	دکترحسن میش مست نهی		
داور ۲:	دکتر اکبرگلچین		
نماینده تحصیلات تکمیلی:	دکتر حسن رضایی		

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب سهیلا حسن لی تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: سهیلا حسن لی

امضاء

تقدیم به

یگانه منجی عالم بشریت امام زمان (عج)

پدرم

پناه امن زندگی ام؛ او که دست های مهربان و قلب بزرگش را دوست دارم و امیدوارم هر روز بهاری عمرش سرشار از طراوت، سرسبزی، سلامتی و امید باشد.

مادرم

شادی و آرامشم ؛ او که ایمان و فداکاریش را چون معبودی بلند مرتبه می ستایم.

سارا

یگانه خواهر عزیزم که همراز و همراه همیشگی من بوده و هست.

علی رضا و محمدعلی

برادران دوست داشتنی ام که پشتوانه های صمیمی زندگی من اند؛ آنان که همیشه در قلبم ماندگار خواهند بود.

و تمام اندیشه ها و قلب هایی که در این راه یاریم نمودند.

سپاسگزاری

یزدان پاک را سپاس که لذت آموختن بر بنده خویش ارزانی داشت و همانا آموزگار راستین هم اوست. با حمد و ستایش از درگاه خداوند متعال که مرا در این راه یاری نمود. امیدوارم با یاری حق تعالی آنچه را فراگرفته ام، در راه رضای او و پیشرفت جامعه به کار گیرم. اینک که بخشی از تلاشم در راه تحصیل علم و دانش به ثمر نشسته است، بر خود لازم می دانم که از این عزیزان فروتنانه سپاسگزاری کنم:

استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر عباسعلی نورا به خاطر راهنمایی های ارزنده شان؛ دکتر اکبر گلچین برای داوری و رهنمودهای پدرانه و دلسوزانه شان؛ دکتر حسن میش مست نهی به خاطر داوری و یاری بی دریغشان؛ دکتر حسن رضایی برای همکاری صمیمانه شان و سرکار خانم دکتر سلجوقی که از راهنمایی های ثمربخششان بسیار سود بردم و سایر اساتید دانشکده ریاضی دانشگاه سیستان و بلوچستان و همچنین اساتید بزرگوار دانشگاه شهید رجایی تهران که از محضرشان استفاده نمودم.

دوست عزیزم خانم آمنه رحیمی و همسرشان آقای هادی رحمانی که صمیمانه، انگیزه مرا در ادامه این راه دوچندان ساختند. همچنین بر خود لازم می دانم از تمامی دوستان عزیزم خانم ها مائده کیخائی، مریم انوری، صدیقه گلستان رو، سمانه علی نژاد، فاطمه زمانی، رامونا ژرف و آقایان دکتر مرتضی بیشه ای و مهندس حامد افشاری که ذهن، قلم و قلبم را یاری دادند، تشکر و قدردانی کنم. از خداوند منان برای این عزیزان موفقیت و کامیابی آرزومندم.

باران رحمت لایزال الهی طراوت بخش لحظه هایشان باد.

سهیلا حسن لی

بهار ۸۷

چکیده

در ارزیابی عملکرد سیستم ها و سنجش کارایی هر یک از واحدهای تصمیم گیرنده (DMU)، روش تحلیل پوششی داده ها (DEA) یکی از مناسب ترین روشهاست.

در تمامی مدل های ارائه شده در تحلیل پوششی داده ها(DEA)، فرض بر این است که تمام ورودی ها و خروجی ها در جهت خواست مدیریّت یا کاربر، قابل تغییر باشد. امّا در جهان واقعی عواملی وجود دارند که تغییرات آنها در اختیار یا کنترل مدیر یا کاربر نمی باشد. این متغیّر ها را، متغیّرهای غیر قابل کنترل می نامند.

در این پایان نامه که شامل چهار فصل می باشد، به معرفی انواع مدل های تحلیل پوششی داده ها (شعاعی و غیرشعاعی) و تعمیم مدل های غیرشعاعی به داده های نادقیق (بازه‌ای) با عوامل غیر قابل کنترل می پردازیم.

در فصل اوّل مروری بر علم تحلیل پوششی داده ها داریم. در فصل دوّم انواع مدل های شعاعی با عوامل غیر قابل کنترل را بررسی می کنیم. در فصل سوّم انواع مدل های غیرشعاعی با عوامل غیر قابل کنترل را بیان و در فصل آخر مدل های غیر شعاعی با داده های نادقیق (بازه‌ای) که عوامل غیر قابل کنترل نیز در آنها در نظر گرفته شده، بیان می گردند.

واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، عوامل قابل کنترل، عوامل غیر قابل کنترل، عوامل قابل کنترل نسبی، مدل شعاعی، مدل غیر شعاعی

فهرست مندرجات

۱ تعاریف ومقدمات ۵

۱—۱ مقدمه ۶

۱—۲ تابع تولید ۶

۱—۳ روش های پارامتری ۷

۱—۴ روش های غیرپارامتری ۷

۱—۵ تحلیل پوششی داده‌ها(DEA) ۸

۱—۵—۱ مزایای DEA ۹

۱—۵—۲ محدودیّت های DEA ۹

۱—۶ کارایی ۱۰

۱—۶—۱ کارایی نسبی ۱۰

۱—۶—۲ کارایی تکنیکی ۱۱

۱—۶—۳ کارایی نسبت ۱۲

۱—۷ مجموعه امکان تولید (PPS) ۱۲

۱—۸ مدل های اساسی تحلیل پوششی داده ها ۱۳

۱—۸—۱ مدل CCR ۱۴

۱—۸—۲ مدل BCC ۱۷

۲ مدل های شعاعی DEA با عوامل غیر قابل کنترل ۱۹

۲—۱ مقدمه ۲۰

۲—۲ عوامل قابل کنترل و غیر قابل کنترل ۲۱

۲—۳ مدل های DEA برای عوامل غیر قابل کنترل ۲۱

۲—۳—۱ مدل BM با بازده به مقیاس متغیر ۲۱

۲—۳—۲ مدل BM با بازده به مقیاس ثابت ۲۹

۲—۳—۳ مدل BM^+ ۳۳

۲—۳—۴ مدل BM^+ با حضورتوأم ورودی ها و خروجی های غیر قابل کنترل ۳۵

۲—۳—۵ مدل NCN ۳۶

۲—۴ عامل های قابل کنترل نسبی ۳۷

۲—۵ مدل‌های DEA برای عوامل قابل کنترل نسبی ۳۸

۲—۶ بحث پیرامون مزایا و اشکالات مدل ها ۴۴

۲—۶—۱ مدل NCN ۴۶

۲–۷ مدل LR ۵۰

۲–۸ مدل پیشنهادی ۵۵

۲–۹ انواع کارایی ۵۶

۲–۱۰ رتبه بندی ۵۸

۳ مدل های غیر شعاعی با عوامل غیر قابل کنترل ۶۱

۳–۱ مقدمه ۶۲

۳–۲ مدل جمعی ۶۲

۳–۲–۱ مزایا و معایب مدل جمعی ۶۷

۳–۲–۲ پایداری مدل در رابطه با انتقال ۶۷

۳–۳ مدل جمعی با عوامل غیر قابل کنترل ۷۴

۳–۴ مدل جمعی با عوامل قابل کنترل نسبی ۷۵

۳–۵ مدل SBM ۷۶

۳–۵–۱ محاسبه‌ی کارآیی مبتنی بر متغیرهای کمکی ۷۶

۳–۵–۲ تفسیری از SBM ۷۸

۳–۵–۳ حل مسأله‌ی SBM ۸۰

۳–۵–۴ رابطه کارایی CCR و SBM ۸۳

۳–۶ مدل SBM با عوامل قابل کنترل نسبی ۸۸

۳–۷ مدل غیر شعاعی کلی ۹۱

۳–۸ مدل غیر شعاعی کلی با عوامل قابل کنترل نسبی ۹۲

۴ مدل غیر شعاعی با داده‌های بازه‌ای با عوامل غیر قابل کنترل ۹۴

۴–۱ مقدمه ۹۵

۴–۲ برنامه ریزی بازه‌ای ۹۵

۴–۲–۱ مقدمه ۹۵

۴–۲–۲ مسأله برنامه ریزی خطی بازه‌ای ۹۵

۴–۲–۳ روش تانک شو چنگ برای حل مسائل برنامه ریزی خطی بازه ای ۹۶

۴–۲–۴ حل مسأله برنامه ریزی خطی بازه‌ای با استفاده از روش نور ۹۸

۴–۲–۵ مدل DEA بازه‌ای ۱۰۰

۴–۳ مدل جمعی با داده‌های بازه‌ای ۱۰۳

۴–۴ مدل غیر شعاعی کلی با داده‌های بازه‌ای ۱۰۶

۴–۵ مدل غیر شعاعی کلی با داده‌های بازه‌ای با عوامل قابل کنترل نسبی ۱۰۹

۴–۶ نتیجه گیری و پیشنهادات ۱۱۲

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱—۱ مقدمه

از زمان های بسیار قدیم، بالاخص از اواخر جنگ جهانی دوم به بعد، مدیران ارشد تصمیم گیر، واقف شدند که هر گونه تصمیم گیری بدون به کار بردن روش های علمی به نحوی، نظرات فردی را اعمال می کند، از این رو استفاده از روش های علمی به منظور ارزیابی واحدها، لازم و ضروری است.

در عصر حاضر کارایی بالاترین هدف مدیران و ارزشمندترین مقصد سازمان ها می باشد، لذا ارزیابی و تصمیم گیری در مورد عملکرد واحد های تصمیم گیرنده همواره برای مدیران حائز اهمیت بوده است؛ زیرا اطّلاع از عملکرد واحدهای تحت امر مدیر، مهمترین وظیفه مدیریّت به منظور تصمیم گیری مناسب می باشد. پیچیدگی اطّلاعات، حجم بسیار زیاد عملکرد، اثرات عوامل خارجی، اثرات واحدهای رقیب بر عملکرد، محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم گیری های مناسب (مثلاً به علت دولتی بودن واحدها)، تغییرات ناگهانی خط مشی به علت برخوردهای انفعالی با مشکلات حاد (مانند بیکاری، تورّم و ...) ...، از عواملی هستند که مدیر بدون برخورد علمی نمی تواند از کارکرد واحدها مطّلع و تصمیم گیری مناسبی را در جهت بهبود کارایی و بهروری اتخاذ نماید. تحلیل پوششی داده ها، علمی است که می تواند به تصمیم گیرنده، اطّلاعات با ارزشی را ارائه نماید.

۱—۲ تابع تولید

در اقتصاد خرد، تابع تولید یکی از مباحث مهم می باشد. اقتصاددانان روش تابع تولید را در اندازه گیری بهره وری مورد استفاده قرار می دهند. تابع تولید، تابعی است که بیشترین خروجی ممکن را از ترکیب ورودی ها فراهم می کند. به عبارت دیگر تابع تولید بیشترین میزان تولید را به ازای ترکیب های مختلف مقادیر عوامل تولید، نشان می دهد که ملاک ارزیابی واحدهای مختلف قرار می گیرد. اگر مقدار خروجی را با Q و ورودی ها را با $x_1, ..., x_m$ نشان دهیم، تابع تولید را می توان به صورت $Q = F(x_1, ..., x_m)$ در نظر گرفت. در تابع تولید فرض بر این است که از ورودی ها به طور کامل استفاده شود، به عبارت دیگر Q حداکثر خروجی است که می توان با استفاده از ترکیب عوامل $x_1, ..., x_m$ تولید نمود.

۱—۳ روش های پارامتری

در روش های پارامتری، ابتدا شکل خاصی از تابع تولید را در نظر گرفته و با اتّخاذ روشی، پارامتر های این تابع را تعیین می کنیم. یکی از معروف ترین توابع تولید در اقتصاد خرد، تابع کاب ـداگلاس [۱] است. این تابع به صورت

$$Q = A_0 \prod_{i=1}^{m} A_i^{x_i}$$

معرفی می شود، که $A_m, ..., A_1$ ورودی ها و Q خروجی می باشد، همچنین $x_m, ..., x_1, A_0$ پارامترهای می باشند که باید برآورد شوند.

به دلایل متعدّد روش های پارامتری برای ارزیابی واحدهای تصمیم گیرنده مناسب نبوده و نیاز به روش های قوی تر با قابلیت های بیشتر می باشد. بعضی از دلایل عبارتند از:

۱. ممکن است لزوم پیش فرض اولیه برای تابع تولید با ماهیت واحدهای تحت ارزیابی در تضاد باشد.

۲. تشخیص ضابطه تابع مشکل است.

۳. پیچیدگی محاسباتی که از ماهیت غیر خطی بودن تابع تولید ناشی می شود، در حالتی که تعداد واحدهای تصمیم گیرنده زیاد باشد، گسترش می یابد.

۴. این روش فقط برای سیستم های با یک خروجی کاربرد دارد.

۱—۴ روش های غیرپارامتری

به دلیل معایب روش پارامتری، از روش های غیر پارامتری که ویژگی های روش تابع تولید را داراست و مشکلات آن را ندارد استفاده می کنیم. مهمترین روش غیرپارامتری، روش تحلیل پوششی داده‌ها می باشد. اوّلین کسی که در سال ۱۹۵۷ روش های غیرپارامتری را در ارزیابی کارایی مطرح نمود، فارل [۲] بود. او با استفاده از خروجی و ورودی های واحدهای تصمیم گیرنده، تابع مرزی را چنان بر مجموعه‌ای از خروجی و ورودی ها برازش داد که از برازش فوق یک تابع قطعه به قطعه خطی به وجود آمد.

---

[۱] Cobb-Daglas

[۲] Farel

در سال ۱۹۷۸ ادوارد رودز[۳] تحقیقات خود را در این زمینه شروع کرد و نتایج حاصل از تحقیقاتش را با همکاری چارنز[۴] و کوپر[۵] در مقاله‌ای منتشر کرد، در این مقاله مدلی برای اندازه گیری کارایی معرفی شد که بعدها به مدل CCR معروف شد [۳]. در سال ۱۹۸۴ بنکر[۶]، چارنز و کوپر مدل CCR را تعمیم دادند و مدلی به نام BCC را معرفی کردند[۱].

اکنون این دو مقاله پایه بسیاری از مطالعات تحلیل کارایی قرار گرفته و این شاخه از تحقیق در عملیات به سرعت پیشرفت نموده و تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها معرفی می شود.

۱–۵ تحلیل پوششی داده‌ها(DEA)

تحلیل پوششی داده ها، تکنیکی برای محاسبه کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم گیرنده است که با استفاده از برنامه ریزی ریاضی انجام می گیرد، عبارت نسبی به این دلیل است که کارایی حاصل نتیجه مقایسه واحدها با یکدیگر است. وقتی که می گوییم واحد تصمیم گیرنده j ام کاراست، یعنی این واحد خوب عمل می کند و از منابع به خوبی استفاده می نماید. برای بررسی بیشتر این روش تعاریف زیر را نیاز داریم: [۲۰]

۱. **واحد تصمیم گیرنده** (DMU): هر سازمان تحت ارزیابی را واحد تصمیم گیرنده (DMU) می نامند. در مباحث DEA کلیه سازمان های زنجیره‌ای مانند بانک ها، فروشگاه ها، بیمارستان ها و ... می توانند به عنوان DMU مطرح و در نهایت نحوه عملکرد (کارایی) آنها با هم مقایسه گردد.

۲. **ورودی:** ورودی عاملی است که با افزایش آن، با حفظ تمام عوامل دیگر، کارایی کاهش و با کاهش آن با حفظ تمام عوامل دیگر، کارایی افزایش می یابد.

۳. **خروجی:** خروجی عاملی است که با کاهش آن، با حفظ تمام عوامل دیگر، کارایی کاهش و با افزایش آن با حفظ تمام عوامل دیگر، کارایی افزایش می یابد.

۴. **غالب بودن**[۷]: هرگاه $Y_j \geq Y_k, X_j \leq X_k$ و نامساوی اکید حدّاقل برای یک مؤلفه برقرار باشد، گوییم DMU_j بر DMU_k غالب، و به عبارت دیگر DMU_k مغلوب DMU_j است.

---

[۳] Edward Rhoods

[۴] Charnes

[۵] Cooper

[۶] Banker

[۷] Dominate

اصول حاکم بر DMU ها

فرض کنید سیستم تحت ارزیابی شامل n واحد تصمیم گیرنده به صورت $DMU_j \quad (j = ۱.۲,\ldots,n)$ باشد که هر DMU_j، دارای m ورودی به صورت $X_j = (x_{۱j}, x_{۲j}, \ldots, x_{mj})$ و s خروجی به صورت $Y_j = (y_{۱j}, y_{۲j}, \ldots, y_{sj})$ باشد. در آن صورت

۱. کلیه ورودی ها وخروجی های یک DMU نامنفی اند و هر DMU حدّاقل یک ورودی مثبت و یک خروجی مثبت دارد.

۲. اصل هم زمان بودن DMU: همه DMU ها در یک زمان باید ارزیابی شوند، زیرا ارزیابی DMU ها در زمان های متفاوت نتایج دور از واقعیّت را به همراه خواهد داشت.

۳. اصل متجانس بودن DMU ها: DMU هایی با یکدیگر مقایسه می شوند که دارای ورودی ها و خروجی های متجانس باشند. به عنوان مثال هیچگاه نمی توان کارایی یک بانک را با یک بیمارستان مقایسه کرد.

۱—۵—۱ مزایای DEA

۱. قابلیت تجزیه و تحلیل مسائلی با چند ورودی و چند خروجی را دارد.

۲. به تابع ارتباط بین ورودی ها و خروجی ها نیازی نیست.

۳. DMU ها در شرایط همگن و یکسان مورد بررسی قرار می گیرد.

۴. ورودی ها و خروجی ها می توانند بر حسب واحدهای متفاوتی سنجیده شوند.

۵. کارایی DMU ها به صورت مقایسه‌ای و نسبی بین واحدهای مورد ارزیابی محاسبه می شوند و مقایسه در شرایط ایده ال انجام نمی گیرد.

۱—۵—۲ محدودیّت های DEA

۱. چون روش DEA با اعمال برنامه ریزی خطی روی DMU ها انجام می شود، لذا از تکنیک نقاط رأسی استفاده می کند و خطا در اندازه گیری ها می تواند مسائل مهمی را ایجاد کند.

۲. DEA برای تخمین کارایی نسبی DMU ها بسیار مناسب است، ولی نمی تواند کارایی مطلق را محاسبه کند.

۳. چون DEA یک تکنیک غیر پارامتری است، اجرای تست های فرض های آماری مشکل است.

۴. چون برای هر DMU باید یک برنامه ریزی خطی مجزا حل شود ، ممکن است هزینه و حجم حل مسأله زیاد باشد.

به عنوان یک اصل همواره ورودی کمتر و خروجی بیشتر مورد توجه است.

۱–۶ کارایی

به طور کلی کارایی نسبت بازده به منابع مصرف شده می باشد. به عبارت دیگر در بین واحدهای تصمیم گیرنده به واحدی کارا گویند، که در مقایسه با بقیه واحدها بالاترین سطح رضایت را برآورده کند.
برای کارایی تعاریف متعدّدی ارائه شده است، که ما در اینجا نمونه هایی را معرفی می‌کنیم:

۱–۶–۱ کارایی نسبی

وقتی می گوئیم DMU_p کارای نسبی است، یعنی نسبت به دیگر DMU ها سنجیده شده است و کارایی DMU_p از دیگر DMU ها بهتر است.
ابتدا در ساده ترین شکل فرض کنید واحدهای تحت ارزیابی دارای یک ورودی و یک خروجی باشند، در این حالت کارایی هر واحد به صورت حاصل تقسیم خروجی بر ورودی می باشد:

$$\text{کارایی واحد } j\text{ام} = \frac{y_j}{x_j}$$

اما واحدهای تصمیم گیرنده همیشه دارای یک ورودی و یک خروجی نیستند، زیرا واحدهای یک سازمان اهداف متعدّدی را دنبال می کنند، بنابراین فرض کنید که هر DMU چند ورودی و چند خروجی دارد. در این صورت کارایی هر واحد برابر است با مجموع وزن دار شده خروجی ها تقسیم بر مجموع وزن دار شده ورودی ها. فرض کنید n تا واحد تصمیم گیرنده داریم که هر واحد m ورودی و s خروجی دارد. بنابراین

کارایی واحد j ام به صورت زیر می باشد:

$$\text{کارایی واحد } j \text{ ام} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \qquad j = 1, \ldots, n$$

در این روش $v_i (i = 1, ..., m)$ و $u_r (r = 1, ..., s)$ ارزش هایی هستند، که به ترتیب برای ورودی ها وخروجی ها قائل می شویم. در علم اقتصاد در واقع u_r ها قیمت خروجی ها و v_i ها هزینه ورودی ها می باشد.

اما مشکل استفاده از این روش آن است که در حالت کلی تعیین ارزش ورودی ها و خروجی ها کار ساده‌ای نیست، به عنوان مثال اگر سیستم تحت ارزیابی واحدهای دانشگاهی باشند، در این حالت ورودی ها عبارتند از امکانات آموزشی و اساتید و خروجی ها نیز مقالات و قبولی دانشگاه می باشند. در این حالت یافتن عددی به منظور ارزش نهادن به کار اساتید و یا مقالات کار ساده‌ای نیست.

برای رهایی از این مشکل کارایی تکنیکی واحد ها را در نظر می گیریم.

۱—۶—۲ کارایی تکنیکی

منظور از کارایی تکنیکی حدّاکثر محصولی است که یک واحد تصمیم گیرنده بتواند، با استفاده از میزان ثابتی ورودی و در سطح معینی از تکنولوژی و دانش فنی تولید نماید. به بیان دیگر کارایی تکنیکی، زمانی است که برای دستیابی به میزان مشخصی از محصول، کمترین ورودی ممکن را مورد استفاده قرار می دهد. در حالتی که یک ورودی و یک خروجی داشته باشیم، واحدی کاراست که خروجی بیشتری به ازای یک واحد ورودی نسبت به واحدهای دیگر تولید کند و در حالت کلی تر در مقایسه دو واحد تصمیم گیرنده که ورودی ها و خروجی های یکسان دارند، ولی یک واحد حدّاقل یکی از ورودی هایش از ورودی متناظر واحد دیگر کمتر باشد، در این صورت واحد مورد نظر در سطح بالاتری از کارایی تکنیکی است. قابل ذکر است که در اظهار نظر های فوق در مورد کارایی تکنیکی، مسأله تعیین وزن ها مطرح نیست و تضمین کارایی تکنیکی مستلزم نگرش سیستمی به ورودی ها و خروجی های همه واحدهای تصمیم گیرنده تحت بررسی است.

۱—۶—۳ کارایی نسبت

برای اینکه اعداد کارایی دامنه تغیرات قابل مقایسه‌ای داشته باشند، معمولاً پس از محاسبه کارایی های هر واحد، بزرگ ترین آنها را انتخاب و همه کارایی های دیگر را بر آن تقسیم می کنیم، که در این صورت دامنه تغییرات کارایی های نرمال شده، بین یک و صفر خواهد بود. کارایی نسبت برای DMU_o به صورت زیر می باشد:

$$\text{کارایی واحد o ام} = \frac{\frac{Y_o}{X_o}}{max|\frac{Y_j}{X_i}|} \qquad j = ۱,\ldots,n$$

مقدار حاصل برای DMU هایی که بیشترین کارایی را دارند، یک خواهد بود و برای بقیه DMU ها مقداری بین صفر و یک خواهد شد.

۱—۷ مجموعه امکان تولید (PPS)

می دانیم که در تمامی روش های ذکر شده، هدف پیدا نمودن مرز کارایی یا تابع تولید است که معمولاً در دسترس نمی باشد. با پذیرفتن اصول موضوعه زیر، مجموعه امکان تولید [۸] زیر را می سازیم و مرز مجموعه را به عنوان تقریبی از تابع تولید در نظر می گیریم.[۶]

$$T = \{(X,Y)| \text{ ورودی } X \text{ بتواند خروجی را تولید کند }\}$$

T تابع اصول موضوعه زیر می باشد:

اصل شمول مشاهدات:

تمام مشاهدات در T قرار دارند.

$$(X_j, Y_j) \in T \quad , \quad j = ۱,...,n \qquad (۱-۱)$$

اصل امکان پذیری:

[۸] Production Possibility Set

الف: اگرX ، Y را تولید کند و $\bar{X} \geq X$ آنگاه $\bar{X}$ نیز Y را تولید می کند.

$$(X,Y) \in T \ , \ \bar{X} \geq X \quad \Longrightarrow \quad (\bar{X},Y) \in T \qquad (۲-۱)$$

ب: اگرX ، Y را تولید کند و $\bar{Y} \leq Y$ آنگاه X نیز $\bar{Y}$ را تولید می کند.

$$(X,Y) \in T \ , \ \bar{Y} \leq Y \quad \Longrightarrow \quad (X,\bar{Y}) \in T \qquad (۳-۱)$$

اصل تحدّب:

این اصل بیان می کند که اگرX ، Y و X' ، Y' را تولید کند، آنگاه ورودی $\lambda X + (۱-\lambda)X'$ ، خروجی $\lambda Y + (۱-\lambda)Y'$ را که در آن $۰ \leq \lambda \leq ۱$ تولید می کند.

$$(X,Y) \in T \ , \ (X',Y') \in T \quad \Longrightarrow \quad [\lambda(X,Y) + (۱-\lambda)(X',Y')] \in T \quad ۰ \leq \lambda \leq ۱ \quad (۴-۱)$$

اصل بیکرانی اشعه:

اگر$(X,Y) \in T$ و$\lambda \geq ۰$ آنگاه $(\lambda X, \lambda Y) \in T$، به عبارت دیگر اگر X، Y را تولید کند، آنگاه هرمضربی از X، Y را تولید می کند.

۱—۸ مدل های اساسی تحلیل پوششی داده ها

مدل های اساسی تحلیل پوشش داده ها را می توان از روش های زیر به دست آورد: [٦]

۱. روش اصول موضوعه.

۲. روش $min-max$ $max-min$).

۳. روش خارج قسمتی.