دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

پایان نامه
جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عدد احاطه‌ای مستقل در گراف‌ها

استاد راهنما

دکتر سید محمود شیخ‌الاسلامی

استاد مشاور

دکتر رعنا خوئیلر

پژوهشگر

پریسا امیری

شهریور ۱۳۹۳
تبریز-ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدر و مادرم

به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است، و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

از استاد با کمالات و شایسته، جناب آقای دکتر **سید محمود شیخ الاسلامی** و استاد مشاور سرکار خانم دکتر **رعنا خوئیلر** که در کمال سعه‌صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند.

ازپدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی‌چشم داشت برای من بوده‌اند.

و از استاد فرزانه و دلسوز، جناب آقای دکتر **جعفر امجدی** که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

پریسا امیری

شهریور ماه ۱۳۹۳

فهرست مطالب

لیست تصاویر

چکیده

فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد. مجموعه D از رئوس گراف G، یک مجموعه احاطه‌گر است، هرگاه هر عضو $V-D$ با رأسی از D، مجاور باشد.می‌نیمم اندازه یک مجموعه احاطه‌گر را عدد احاطه‌ای G گویند و بانماد $\gamma(G)$ نشان می‌دهند. مجموعه D از رئوس گراف G، یک مجموعه مستقل است، هرگاه هیچ دو رأسی از D، در G مجاور نباشد. ماکسیمم اندازه یک مجموعه مستقل را عدد استقلال G گویند و با نماد $\alpha(G)$ نشان می‌دهند. مجموعه D از رئوس گراف G، یک مجموعه احاطه‌گر مستقل است، هرگاه D هم احاطه‌گر و هم مستقل باشد. می‌نیمم اندازه یک مجموعه احاطه‌گر مستقل را عدد احاطه‌ای مستقل G گویند وبانماد $i(G)$ نشان می‌دهند.

در این پایان‌نامه، کران‌هایی برای $i(G)$ پیدا کرده و گراف‌هایی را که این کران‌ها را اختیار می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم و نیز یک کران بالا برای حاصلجمع $i(G)+i(\bar{G})$ و حاصلضرب $i(G).i(\bar{G})$ ارائه می‌کنیم.

واژه های کلیدی: عدد احاطه‌ای، عدد احاطه‌ای مستقل

پیشگفتار

ایده مجموعه احاطه‌گر مستقل در مسئله‌ای از بازی شطرنج مطرح شد که منجر به مطالعه مجموعه‌های احاطه‌گر در نظریه گراف گردید. در سال ۱۸۶۲ دِجنیچ [۱] مسئله‌ای را مطرح کرد که در آن مینیمم تعداد مهره‌های وزیری را که می توان در یك صفحه شطرنج قرار داد طوری که نتوانند متقابلاً به هم حمله کنند و در هر مربعی یا یک وزیر قرار گرفته و یا توسط وزیری در خطر باشد [۱۳]. گراف G را می توان به شکل صفحه شطرنج ۸ $*$ ۸ نشان داد به این صورت که هر مربع را مثل یك رأس در نظر می گیریم، دو رأس با هم مجاورند اگر وزیر واقع شده در یك مربع بتواند به مربع دیگر حمله کند. گراف G حاصل شده گراف وزیر ها نامیده می شود. مینیمم تعداد مهره‌های وزیری که می توان در صفحه شطرنج قرار داد به طوری که متقابلاً به هم حمله نکنند و بتوانند همه مربع های صفحه شطرنج را احاطه کنند عدد احاطه‌ای مستقل$i(G)$ است. برای گراف وزیرها داریم $\alpha(G) = ۸$، $i(G) = ۷$، $\gamma(G) = ۵$. نظریه احاطه‌ای مستقل در سال ۱۹۶۲ توسط بِرژ[۲] [۴] ارائه شد و سپس توسط اوره[۳] [۳۰] مطالعه گردید. عدد احاطه‌ای مستقل $i(G)$ توسط کوکاین[۴] و هدتنیمی[۵] بررسی شده است [۸، ۹]. جیمبل[۶]، وسترگارد[۷] [۱۷]، چارترند[۸] و لِسنیک[۹] [۷] کران بالایی برای عدد احاطه‌ای مستقل در گراف‌های کلی و گراف های دو بخشی برحسب مرتبه آنها پیدا کردند. در حالی که فاوارون[۱۰] [۱۵]، هاویلند[۱۱] [۲۲، ۲۳]، لَم و همکارانش [۱۲] [۲۷]، سان[۱۳] و وانگ[۱۴] [۳۷]

---

[۱] Jaenisch de

[۲] Berge

[۳] Ore

[۴] Cockayne

[۵] Hedetniemi

[۶] Gimbel

[۷] Vestergaard

[۸] Chartrand

[۹] Lesinak

[۱۰] Favaron

برای $i(G)$ کران‌های بالا به صورت تابعی برحسب مینیمم درجه $\delta(G)$ و مرتبه n پیدا کردند. اخیراً هاویلند[15] [۲۴] عدد احاطه‌ای مستقل را مطالعه کرد.

در فصل دوم، مقدار دقیق این پارامتر را برای گراف‌های خاص، بدست می‌آوریم. هم‌چنین کران‌های بالایی را برای آن در مورد گراف‌های دوبخشی و درخت‌ها و گراف‌های خوش پوشیده ارائه کرده و نشان می‌دهیم در چه گراف‌هایی $i(G) = \gamma(G)$ و $i(G) = \alpha(G)$ می‌باشد.

در فصل سوم، کران‌های بالا برای $i(G)$ را که هاویلند برای گراف‌های فاقد مثلث ماکسیمال ارائه داده است، می‌آوریم.

در فصل چهارم، به بررسی کران‌هایی برای $i(G)$ در گراف‌های منظم پرداخته و سپس کرانی را برای حاصلجمع $i(G) + i(\bar{G})$ و حاصلضرب $i(G).i(\bar{G})$ که کران‌های نوردهاوس-گادوم[16] [۱۸] نامیده شده‌اند، ارائه می‌دهیم.

---

[11] Haviland

[12] Lam

[13] Sun

[14] Wang

[15] Haviland

[16] Nordhaus-Gaddum

فصل ۱

تعاریف

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

در این بخش برخی تعاریف مقدماتی نظریه گراف را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌کنیم. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد.

تعریف ۱.۱. **همسایگی باز** رأس v از G، $N_G(v)$ مجموعه تمام رأس هایی از G است که با v مجاورند، به عبارت دیگر،

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}.$$

همسایگی بسته رأس v عبارت است از $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. اگر S زیرمجموعه $V(G)$، آنگاه **همسایگی باز و بسته** S به ترتیب عبارتند از $N(S) = \bigcup_{v\in S} N(v)$ و $N[S] = N(S) \cup S$.

تعریف ۲.۱. $|N_G(v)|$ را **درجه رأس** v **در** G نامیده و با $\deg_G(v)$ نشان می‌دهند. رأس از درجه صفر، **رأس تنها** و رأس از درجه یک، **برگ** نامیده می‌شود. تنها همسایه یک برگ را **رأس اتکاء** می‌نامند. **ماکسیمم و مینیمم** درجه G را به ترتیب با $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نشان می‌دهند .

تعریف ۳.۱. هرگاه بین هر دو رأس متمایز گراف G مسیری موجود باشد، گراف G را **همبند** می‌نامند. گرافی که همبند نباشد، **ناهمبند** نامیده می‌شود. اگر با حذف هر $k - ۱$ رأس دلخواه از G، گراف حاصل همبند باشد، در این صورت G، **k-همبند** نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱. C_n معرف یك **دور** n رأسی، P_n معرف یك **مسیر** n رأسی، K_n معرف یک **گراف کامل** n رأسی و $K_{r,s}$ یک **گراف دو بخشی کامل** با مجموعه بخش هایی از اندازه s و r است. و اگر

$r = s$ باشد آنگاه گراف را **دوبخشی کامل متعادل** گویند.

تعریف ۵.۱. اگر در یك گراف درجهٔ همه ی رئوس برابر r باشد آنگاه گراف را r**-منظم** گویند. هر گراف ۳-منظم را **گراف مکعبی** گویند.

تعریف ۶.۱. گراف G **کامل** است هرگاه بین هر دو رأس آن یالی وجود داشته باشد.

تعریف ۷.۱. فرض کنید H و G دو گراف باشند. دراین‌صورت H را **زیر گراف G** گویند هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. اگر G شامل گراف F به عنوان زیر گراف القایی نباشد آنگاه G فاقد F است. در حالت خاص یك **گراف فاقد پنجه** است هرگاه گراف فاقد $K_{۱,۳}$ باشد.

تعریف ۸.۱. **متمم** $\bar{G}$ از گراف G، گرافی است با مجموعه رئوس $V(G)$ به طوریکه دو رأس در $\bar{G}$ مجاورند اگر و تنها اگر این رئوس در G مجاور نباشند.

تعریف ۹.۱. **تاج G** که با **cor(G)** نشان داده می شود گرافی است که با اضافه کردن یك یال معلق به هر رأس از گراف G بدست می آید. در حالت کلی **تاج تعمیم یافته cor(G،r)** گرافی است که با اضافه کردن r یال معلق به هر یك از رئوس گراف G بدست می آید.

مثال ۱۰.۱.

شکل ۱.۱: گراف G و تاج گراف G

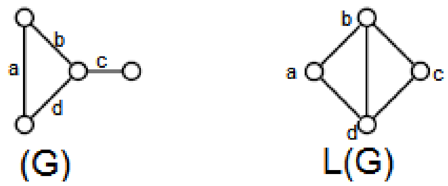
تعریف ۱۱.۱. **فاصله** بین دو رأس $u, v \in V(G)$، $d_G(u, v)$ برابر طول کوتاهترین (u, v)-مسیر در G است. بزرگترین فاصله موجود بین رئوس گراف G را **قطر** G نامیده و با $\mathrm{diam}(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۲.۱. گراف همبند بدون دور را **درخت** می‌نامند. **درخت ستاره مضاعف** است هرگاه شامل دقیقاً دو رأس غیر انتهایی باشد. لزوماً این دو رأس مجاورند. به عبارت دیگر درخت T ستاره مضاعف است هرگاه دارای قطر ۳ باشد. یک ستاره مضاعف به ترتیب با r و q رأس انتهایی، با $S_{r,q}$ نشان داده می‌شود. در حالت خاص فرض کنید $s_{r,r} = cor(p_۲, r)$.

تعریف ۱۳.۱. برای **حاصلضرب دو گراف** G و H ابتدا به تعداد رئوس G کپی‌هایی از H رسم کرده و رئوس متناظر G را به هم وصل می‌کنیم و یا به تعداد رئوس H کپی‌هایی از G رسم کرده و یال‌های مناسب را رسم می‌نماییم.

تعریف ۱۴.۱. در گراف G اگر به جای هر یال یك رأس قرار داده و رئوس متناظر با یال‌هایی که با هم مجاورند را به هم وصل کنید گراف جدیدی بدست خواهد آمد که آن را **گراف خطی** گویند و با $L(G)$ نشان می‌دهند.

مثال ۱۵.۱.



شکل ۲.۱: گراف G و گراف خطی آن

تعریف ۱۶.۱. به مجموعه‌ای از یال‌های گراف G که رأس مشترك ندارند **جورسازی** گفته می‌شود. **جورسازی** را **تام** گویند هرگاه شامل تمام رئوس G باشد.

تعریف ۱۷.۱. گراف G_1 با گراف G_2 یکریخت است هرگاه نگاشت دوسوئی مانند φ از $V(G_1)$ به $V(G_2)$ وجود داشته باشد بطوریکه φ حافظ اتصال باشد. یعنی $uv \in E(G_1)$ اگر و تنها اگر $\varphi u\varphi v \in E(G_2)$.

تعریف ۱۸.۱. زیر مجموعه S از $V(G)$ را یک **خوشه** در G گویند هرگاه $G[S]$ گراف کامل باشد. به عبارت دیگر S در G یک خوشه است اگر و تنها اگر S یک مجموعه مستقل در $\bar{G}$ باشد.

تعریف ۱۹.۱. به طول کوتاهترین دور در گراف G، **کمرگراف** گویند.

تعریف ۲۰.۱. یک **گراف تهی** ، گرافی است که تنها شامل رأس است و مجموعه یال‌های آن تهی است یعنی یالی ندارد.

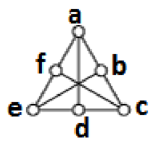
۲.۱ مجموعه‌های احاطه‌گر

تعریف ۲۱.۱. مجموعه$D \subseteq V$ در گراف G، یک مجموعه **احاطه‌گر** نامیده می‌شود هرگاه هر عضو $V(G) - D$ با رأسی از D، مجاور باشد. **عدد احاطه‌ای** گراف G، $\gamma(G)$، کوچکترین اندازه یک

مجموعه احاطه‌گر G است. یک مجموعه احاطه‌گر از اندازه $\gamma(G)$ را یک $\gamma(G)$ **-مجموعه** می‌نامند.

تعریف ۲۲.۱. اگر G یك گراف فاقد رأس ایزوله باشد، آنگاه یك γ-مجموعه D وجود دارد بطوریکه به ازای هر $v \in D$، یك رأس $u \in V(G) - D$ وجود داشته باشد که $N[u] \cap D = \{v\}$. در اینصورت u را **همسایه خصوصی خارجی** v گویند.

مثال ۲۳.۱. *در شکل زیر برای γ-مجموعه $D = \{a, d\}$ همسایه خصوصی خارجی a، b می‌باشد زیرا $N[b] \cap D = \{a\}$.*



شکل ۳.۱: a همسایه خصوصی خارجی b

تعریف ۲۴.۱. فرض کنید G یک گراف باشد. زیرمجموعه S از $V(G)$، که در آن هیچ دو رأسی مجاور نباشند، **مجموعه مستقل** نامیده می‌شود. مجموعه مستقل S در G **ماکسیمال** است هرگاه هیچ مجموعه مستقلی از G شامل S موجود نباشد. مجموعه مستقل S **ماکسیمم** نامیده می‌شود هرگاه هیچ مجموعه مستقل S' با شرط $|S'| > |S|$ موجود نباشد. تعداد رئوس یک مجموعه مستقل ماکسیمم در گراف G را **عدد استقلال** G نامیده و با $\alpha(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲۵.۱. به مجموعه‌ای که هم احاطه‌گر باشد و هم مستقل **مجموعه احاطه‌گر مستقل** گویند و به کوچکترین اندازه مجموعه احاطه‌گر مستقل، **عدد احاطه‌ای مستقل** گفته و با $i(G)$ نشان می‌دهند. ویک مجموعه احاطه‌گر مستقل از اندازه $i(G)$ را یک $i(G)$ **-مجموعه** می‌نامند.

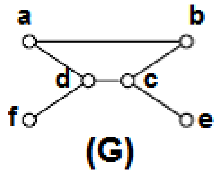
تعریف ۲۶.۱. اگر عدد احاطه‌ای مستقل برابر عدد استقلال باشد، آنگاه گراف **خوش پوشیده** نامیده می‌شود. برای مثال، گراف‌های دو بخشی کامل متعادل، خوش پوشیده هستند.

تعریف ۲۷.۱. اگر به ازای هر زیر گراف القایی H از G، $\gamma(H) = i(H)$ آنگاه گراف G را **احاطه‌ای تام** گویند.

تعریف ۲۸.۱. مجموعه D، یک **مجموعه احاطه‌گر مینیمال** است هرگاه با برداشتن یک رأس، مجموعه D، دیگر احاطه‌گر نباشد.

تعریف ۲۹.۱. به ماکسیمم اندازه در بین مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال، **بالاترین عدد احاطه‌ای** گویند و با $\Gamma(G)$ نشان می‌دهند.

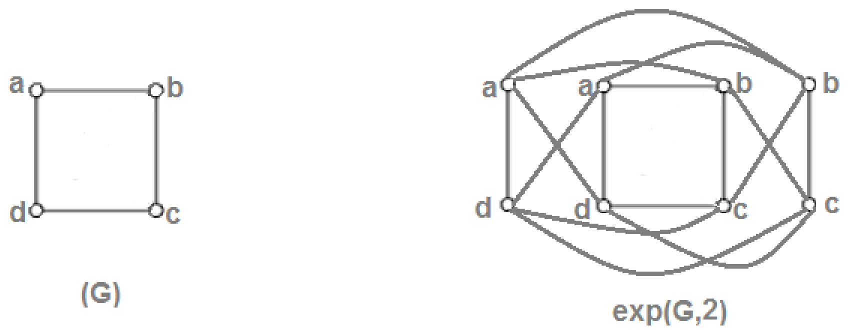
مثال ۱.۳۰. *فرض کنید* $D_1 = \{a,c,f\}$، $D_2 = \{c,d\}$، $D_3 = \{a,c,f\}$ *و* $D_4 = \{a,d,e\}$ **که** *در آن* D_1، D_2، D_3 *و* D_4 *به ترتیب مجموعه‌های مستقل، احاطه‌گر، احاطه‌گر مستقل و احاطه‌گر مینیمال هستند. در اینصورت داریم* $\alpha(G) = 3$، $\gamma(G) = 2$، $i(G) = 3$ *و* $\Gamma(G) = 3$.



شکل ۱.۴: گرافی با $\alpha(G) = 3, \gamma(G) = 2, i(G) = 3$ و $\Gamma(G) = 3$

تعریف ۱.۳۱. برای یک عدد مثبت r، **توسعه گراف G** که با **exp(G،r)** نشان داده می‌شود گرافی است که با جایگزین کردن هر رأس v از G با یك مجموعه مستقل I_v از اندازه r و جایگزین کردن گراف دو بخشی کامل با مجموعه بخش های I_v و I_w به جای یال vw از G بدست می آید.

مثال ۱.۳۲.



شکل ۱.۵: گراف G و توسعه گراف G

تعریف ۱.۳۳. برای اعداد صحیح s_1, s_2, s_3, s_4 اگر گرافی وجود داشته باشد به‌طوریکه $\gamma(G) = s_1$، $i(G) = s_2$، $\alpha(G) = s_3$ و $\Gamma(G) = s_4$ آنگاه دنباله (s_1, s_2, s_3, s_4) را **دنباله احاطه‌ای** گویند.

فصل ۲

عدد احاطه‌ای مستقل در گراف‌ها

۱.۲ مقدمه

یادآوری می‌کنیم که C_n معرف یک دور n رأسی، P_n معرف یک مسیر n رأسی، K_n معرف یک گراف کامل n رأسی و $K_{r,s}$ معرف گراف دو بخشی کامل با بخش‌هایی از اندازه r, s است.

گزاره ۱.۲.

الف) به ازای $n \geq ۳$، $i(P_n) = i(C_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$.

ب) برای گراف دو بخشی کامل با بخش‌هایی از اندازه r, s *داریم:* $i(K_{r,s}) = min(r, s)$.

گزاره ۲.۲.

الف) $i(\exp(G, r)) = r.i(G)$.

ب) $i(cor(G, r)) = r|V(G)| - (r - ۱)\alpha(G)$.

برهان.

الف) در یک گراف دو رأس غیر مجاور x و y را در نظر بگیرید، اگر $N(x) = N(y)$، آنگاه هر مجموعه احاطه‌گر مستقل یا شامل هر دوی x و y است و یا شامل هیچیک از آن‌ها نیست. ثابت می‌شود که اگر D یک مجموعه احاطه‌گر مستقل از $\exp(G, r)$ باشد، آنگاه به ازای هر رأس از G، D یا شامل همه رئوس I_v است و یا شامل هیچ یک از رأسهای I_v نیست. بنابراین $\{v : I_v \in D\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مستقل از G است.

ب) فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر مستقل از $cor(G, r)$ باشد. به ازای هر رأس v از G، D شامل v و یا شامل همه r برگ مجاور با v است. این نتیجه می‌دهد که به ازای هر D به اندازه کافی

کوچک، D باید شامل حداکثر ممکن از رئوس G باشد که این مجموعه مستقل ماکسیمم نامیده می‌شود. $\square$

۲.۲ کران‌ها روی عدد احاطه‌ای مستقل

۱.۲.۲ کران‌های کلی

نتیجه اول یک رابطه ساده بین عدد احاطه‌ای مستقل و ماکسیمم درجه یک گراف را نشان می‌دهد که به وسیله برژ[۱] [۵] ارائه شده است.

گزاره ۳.۲. ([۵]) *برای یک گراف G با n رأس و ماکسیمم درجه Δ،* $\lceil \frac{n}{1+\Delta} \rceil \leq i(G) \leq n - \Delta$.

تبصره ۴.۲. *اگر G یک گراف بدون رأس تنها باشد، آنگاه یک γ-مجموعه D وجود دارد به‌طوریکه به ازای هر $v \in D$، یک رأس $u \in V(G) - D$ وجود دارد به‌طوریکه $N[u] \cap D = \{v\}$. (در این صورت u را همسایه خصوصی خارجی v گویند).*

بولابس[۲] و کوکاین[۳] [۶] تبصره فوق را بکار بردند و کران بالای زیر را برای عدد احاطه‌ای مستقل ثابت کردند.

قضیه ۵.۲. ([۶]) *اگر G یک گراف بدون رأس تنها باشد، آنگاه* $i(G) \leq n + 2 - \gamma(G) - \lceil \frac{n}{\gamma(G)} \rceil$.

برهان. بنابه تبصره فوق یک γ-مجموعه D وجود دارد به‌طوریکه هر رأس $v \in D$ دارای یک همسایه خصوصی خارجی است. به ازای هر رأس $v \in D$، یک همسایه خصوصی خارجی v' انتخاب کنید. بنابه اصل حجره‌ها، رأس $y \in D$ وجود دارد که حداقل با $\frac{(n-|D|)}{|D|}$ رأس از $V(G) - D$ مجاور است. فرض کنید D' یک مجموعه مستقل ماکسیمال شامل y باشد. چون $D' \cap N(y) = \emptyset$ و D' می‌تواند حداکثر شامل یکی از x و x' به ازای هر رأس $x \in D - \{y\}$ باشد، نتیجه می‌شود که

$$|D'| \leq n - (\gamma(G) - 1) - \lceil (n - \gamma(G))/\gamma(G) \rceil.$$

و چون $i(G) \leq |D'|$، نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

---

[۱] Berge

[۲] Bollabs

[۳] Cochayne

چون کران بالا در قضیه ۵.۲ زمانی که $\gamma(G) = \sqrt{n}$ بیشینه است، کران زیر بلافاصله بدست می‌آید که ابتدا به وسیله فاوارون[۴] [۱۵] بدست آمده است.(هم چنین این کران در [۱۷] نیز ثابت شده است).

قضیه ۶.۲. ([۱۵]) *اگر G یک گراف بدون رأس تنها بوده و n رأسی باشد، آنگاه*

$$i(G) \leq n + ۲ - ۲\sqrt{n}.$$

برهان. در قضیه ۵.۲ قرار دهید $\gamma(G) = \sqrt{n}$. □

برای مثال اگر $G = cor(k_m, m - ۱)$ آنگاه تساوی در قضیه ۶.۲ اتفاق می‌افتد. توجه کنید که G دارای مرتبه $m^۲$ بوده و بنابه گزاره ۲.۲، $i(G) = (m - ۱)^۲ + ۱ = n + ۲ - ۲\sqrt{n}$.

قضیه ۷.۲. ([۲۱]) *فرض کنید G یک گراف از مرتبه n با مینیمم درجه δ باشد. اگر $n/۴ \leq \delta \leq ۲n/۵$، آنگاه $i(G) \leq ۲(n - \delta)/۳$ و اگر $۲n/۵ \leq \delta \leq n/۲$، آنگاه $i(G) \leq \delta$.*

لم ۸.۲. ([۳۷]) *فرض کنید X یک مجموعه مستقل ماکسیمم از G با $|X| = r$ و $Y = V - X$ باشد. $B(X, Y)$ را زیر گراف دوبخشی القایی توسط یالهای ما بین X و Y تعریف کنید. فرض کنید y' رأسی از Y باشد به طوری که $d_B(y') \geq r\delta/(n - r)$ و $Y' = \{y \in Y \mid N_B(y) \leq N_B(y')\}$. فرض کنید Z یک مجموعه مستقل ماکسیمال از $G[Y']$ شامل y' باشد.*
(۱) اگر $|Z| - \delta \leq d_B(y') - r\delta/(n - r)$ آنگاه $i \leq n + ۲\delta - ۲\sqrt{n\delta}$.
(۲) اگر $|Z| - \delta > d_B(y') - r\delta/(n - r)$ آنگاه برای هر زیرگراف سرهٔ Z' از Z داریم

$$|Z - Z'| - \delta > d_B(y') - |N_B(Z')| - r\delta/(n - r).$$

برهان. (۱) فرض کنید $|Z| - \delta \leq d_B(y') - r\delta/(n - r)$. چون $(X - N_B(y')) \cup Z$ یک مجموعه مستقل ماکسیمال از G است داریم

$$i \leq |X| - |N_B(y')| + |Z|$$

$$= r + d_B(y') + |Z|$$

$$\leq r + \delta - r\delta/(n - r)$$

[۴] Favaron

$$\leq n + ۲\delta - ۲\sqrt{n\delta}.$$

(۲) چون X یک مجموعه مستقل ماکسیمال و $(X - N_B(Z')) \cup Z'$ یک مجموعه مستقل است از اینرو $|X| - N_B(Z') + |Z'| \leq |X|$. بنابراین $|Z'| \leq |N_B(Z')|$. پس حکم برقرار است. □

قضیه ۹.۲. ([۳۷]) *اگر G یک گراف از مرتبه n بوده و دارای مینیمم درجه δ باشد، آنگاه*

$$i(G) \leq n + ۲\delta - ۲\sqrt{\delta n}.$$

برهان. فرض کنید $\delta > ۰$ باشد (حکم بوضوح برای $\delta = ۰$ برقرار است). توجه کنید که نامساوی $n + ۲\delta - ۲\sqrt{n\delta} \geq n/۲$ برقرار است و $n + ۲\delta - ۲\sqrt{n\delta} = n/۲$ اگروتنهااگر $\delta = n/۴$. اگر $\delta = n/۴$ آنگاه بنابه قضیه ۷.۲ $i(G) \leq ۲(n - \delta)/۳ = n/۲ = n + ۲\delta - ۲\sqrt{n\delta}$. پس در این حالت حکم برقرار است.

حال فرض کنید $n + ۲\delta - ۲\sqrt{n\delta} > n/۲$ و هم چنین فرض کنید (فرض خلف) G گرافی با $i(G) > n + ۲\delta - ۲\sqrt{n\delta} > n/۲$ بوده و X یک مجموعه مستقل ماکسیمم از G باشد. در این صورت $r = |X| > n + ۲\delta - ۲\sqrt{n\delta}$. قرار دهید $Y = V - X$. از اینرو $|Y| = n - r$. $B(X, Y)$ را زیر گراف دوبخشی القایی توسط یالهای مابین X و Y از G در نظر بگیرید.

اگر $x \in X$ باشد آنگاه $d_B(x) = d_G(x) \geq \delta$. پس رأسی مانند $y_۱ \in Y$ وجود دارد به طوری که $d_B(y_۱) \geq r\delta/(n - r)$. فرض کنید $Y_۱ = \{y \in Y \mid N_B(y) \subseteq N_B(y_۱)\}$ و $Z_۱$ یک مجموعه مستقل ماکسیمال از $G[Y_۱]$ شامل $y_۱$ باشد. بنابه فرض خلف و نامساوی (۱) از لم ۸.۲ نتیجه می‌شود $|Z_۱| - \delta > d_B(y_۱) - r\delta/(n - r)$. قرار دهید $B_۱ = (X - N_B(y_۱), Y - Z_۱)$. از اینرو به ازای هر $v \in X - N_B(y_۱)$، $N_B(v) \cap Z_۱ = \emptyset$. بنابراین به ازای هر $v \in X - N_B(y_۱)$، $d_{B_۱}(v) = d_B(v) \geq \delta$.

ادعا ۱: رأسی مانند $y_۲ \in Y - Z_۱$ وجود دارد به طوری که $d_{B_۱}(y_۲) \geq r\delta/(n - r)$.

برهان ادعا: فرض کنید (فرض خلف) $(r - d_{B_۱}(y_۱))\delta/(n - r - |Z|_۱) < r\delta/(n - r)$. با ساده کردن رابطه خواهیم داشت $(n - r)(r - d_{B_۱}(y_۱)) < r(n - r - |Z_۱|)$ و یا $r|Z_۱| < (n - r)d_B(y_۱)$. چون $|Z_۱| - \delta > d_B(y_۱) - r\delta/(n - r)$، ازاینرو $d_B(y_۱) < |Z_۱| - \delta + r\delta/(n - r)$. بنابراین $r|Z_۱| < (n - r)d_B(y_۱) < (n - r)(|Z_۱| - \delta + r\delta/(n - r))$. در نتیجه $r(|Z_۱| - \delta) < (n - r)(|Z_۱| - \delta)$ که این غیر ممکن است چون $r > n + ۲\delta - ۲\sqrt{n\delta} > n/۲$ و $|Z_۱| - \delta > ۰$. ■

فرض کنید $Y^۲ = \{y \in Y \mid N_B(y) \subseteq N_B(y_۲)\}$ و $Z^۲$ یک مجموعه مستقل ماکسیمال از $G[Y^۲]$ شامل $y_۲$ باشد. همچنین فرض کنید $Y_۲ = \{y \in Y - Z_۱ \mid N_{B_۱}(y) \subseteq N_{B_۱}(y_۲)\}$ و $Z_۲$ یک مجموعه مستقل ماکسیمال از $G[Y_۲]$ شامل $Z^۲ \cap Y_۲$ باشد. بوضوح $Z_۱$ و $Z_۲$ مجزا هستند، $Z^۲ \subseteq Z_۱ \cup Z_۲$

و $y_۲ \in Z^۲ \cap Z_۲$.

ادعا ۲: $|Z_۲| - \delta > d_{B_۱}(y_۲) - r\delta/(n-r)$.

برهان ادعا: چون $B_۱$ یک زیر گراف القایی از $B(X, Y)$ است لذا $d_B(y_۲) \geq d_{B_۱}(y_۲) \geq r\delta/(n-r)$. بنابه فرض خلف و نامساوی (۱) از لم ۲.۸ داریم $|Z^۲| - \delta > d_B(y_۲) - r\delta/(n-r)$.

چون $y_۲ \in Z^۲ \cap Z_۲$ و $Z' = Z^۲ - Z_۲$ یک زیر مجموعه سره از $Z^۲$ است. پس بنابه نامساوی (۲) از لم ۲.۸ داریم

$$|Z_۲| - \delta \geq |Z^۲ - Z'| - \delta$$

$$> d_B(y_۲) - |N_B(Z')| - r\delta/(n-r).$$

بعلاوه چون $Z' \subseteq Z_۱$، $N_B(Z') \subseteq N_B(y_۲) - N_{B_۱}(y_۲)$، در نتیجه $d_B(y_۲) - |N_B(Z')| \geq d_{B_۱}(Y_۲)$. از اینرو $|Z_۲| - \delta > d_{B_۱}(y_۲) - r\delta/(n-r)$. ■

قرار دهید $B_۲ = (X - N_B(y_۱) - N_{B_۱}(y_۲), Y - Z_۱ - Z_۲)$. فرض کنید به ازای $j \geq ۲$

(۱) $B_j = (X - N_B(y_۱) - N_{B_۱}(y_۲) - ... - N_{B_{j-۱}}(y_j), Y - Z_۱ - Z_۲ - ... - Z_j)$ و

$y_{j+۱} \in Y - (Z_۱ \cup ... \cup Z_j)$ به طوری که $d_{B_j}(y_{j+۱}) \geq r\delta/(n-r)$،

(۲) $Y^{j+۱} = \{y \in Y \mid N_B(y) \subseteq N_B(y_{j+۱})\}$ و $Z^{j+۱}$ یک مجموعه مستقل ماکسیمال از $G[Y^{j+۱}]$ شامل $y_{j+۱}$ باشد،

(۳) $Y_{j+۱} = \{y \in Y - Z_۱ - ... - Z_j \mid N_{B_j}(y) \subseteq N_{B_j}(y_{j+۱})\}$ و

(۴) $Z_{j+۱}$ یک مجموعه مستقل ماکسیمال از $G[Y_{j+۱}]$ شامل $Z^{j+۱} \cap Y_{j+۱}$ است به طوری که $|Z_{j+۱}| - \delta > d_{B_j}(y_{j+۱}) - r\delta/(n-r)$. بنابراین عدد صحیحی مانند t وجود دارد به طوری که $X = N_B(y_۱) \cup N_{B_۱}(y_۲) \cup ... \cup N_{B_{t-۱}}(y_t)$. چون $Z_۱ \cup Z_۲ \cup ... \cup Z_t \subseteq Y$، $Z_۱, ..., Z_t$ جفت‌های مجزا هستند و $|Z_j| \geq \delta$ از اینرو $|Y| \geq |Z_۱| + ... + |Z_t|$ و $t \leq (n-r)/\delta$. به ازای $j = ۱, ..., t$ داریم $|Z_j| - \delta > d_{B_{j-۱}}(y_j) - r\delta/(n-r)$ و از آن نتیجه می‌شود هرگاه $B_۰ = B$ آنگاه $|Z_j| > d_{B_{j-۱}}(y_j) + \delta - r\delta/(n-r)$. توجه کنید

$$d_B(y_۱) + d_{B_۱}(y_۲) + ... + d_{B_{t-۱}}(y_t) = |N_B(y_۱)| + |N_{B_۱}(y_۲)| + ... + |N_{B_{t-۱}}(y_t)| = |X| = r$$

از اینرو

$$|Y| \geq |Z_۱| + |Z_۲| + ... + |Z_t|$$

$$> d_B(y_۱) + d_{B_۱}(y_۲) + ... + d_{B_{t-۱}}(y_t) + t(\delta - r\delta/(n-r))$$