دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه ، گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد(M.Sc)

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان :

حل عددی معادله انتگرال فردهلم دو بعدی با استفاده از تابع پایه‌ای رادیال گاوسی

استاد راهنما :

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی

استاد مشاور :

دکتر جلیل رشیدی‌نیا

پژوهشگر :

ثریا محمّدزمانی

تابستان ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

ارواح پاک و بزرگوار پدر ومادرم

وتقدیم به همسرم،

که محبت و دلگرمی‌اش

*گام‌هایم را استوارتر*کرد

و همراهی و تحملش

دشواریها را برایم آسان نمود.

سپاسگزاری:

بار الها:

«به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نام، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌عوض، مناعتی بی‌غروب، گستاخی بی‌خامی، عشق بی‌هوس، کار بی‌پاداش و تنهایی در انبوه جمعیت روزی کن».

«دکتر علی شریعتی»

حمد و سپاس خداوندی را که معطّی رحمت‌های بی‌کران و جمیع مخلوقات بی‌هیچ چشم‌داشتی است. خداوندی که مرحّم بر مرحّمان است و مبدع بر بدیع افکار در دایره اذهان جستجوگر هر کمال طلبی.

باتشکر از استاد فاضل و دانشمندم جناب آقای دکتر فریبرزی عراقی که با لطف فراوان کاستی‌های مرا تحمل فرمودند و مرا در این راه تحقیق یاری دادند. امیدوارم وجود محترم و پردانش ایشان در سایه پروردگار دانا همواره پایدار باقی بماند.

با تشکر فراوان از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر شاهرخ اسماعیلی که راهنمایی های ایشان مرا در پیشرفت هر چه بهتر این پژوهش یاری بخشید.

و سپاس از اساتید گرانقدرم: جناب آقای دکتر رشیدی‌نیا و جناب آقای دکتر ادیبی که فرمایشات و راهنمایی‌های ارزنده‌شان افق جدیدی از بینش را پیش چشم من گشود.

بسمه تعالی

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب ثریا محمد زمانی دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد به شماره دانشجویی ۸۷۰۸۴۶۴۳۵۰۰ در رشته ریاضی با گرایش آنالیز عددی که در تاریخ ۹۰/۵/۲۳ از پایان‌نامه خود تحت عنوان حل معادلات انتگرال فردهلم دو بعدی با استفاده از تابع پایه‌ای رادیال گاوسی با کسب نمره ۱۷ و درجه بسیار خوب دفاع نموده‌ام بدینوسیله متعهد می‌شوم:

۱- این پایان‌نامه حاصل تحقیق رو پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان‌نامه، کتاب، مقاله و ...) استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و رویه‌های موجود نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست ذکر و درج کرده‌ام.

۲- این پایان‌نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین‌تر و یا بالاتر) در سایر دانشگاهها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

۳- چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هر گونه بهره‌برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

۴- چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی:

تاریخ و امضاء:

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

چکیده :

در دو دهۀ اخیر برای تقریب توابع چند متغیره، از توابع پایه‌ای رادیال (شعاعی) استفاده می-کنند.توابع پایه‌ای رادیال (شعاعی) و مشتقاتش حالت کلاسیکی دارند که این توابع با استفاده از گره ها به راحتی بدست می‌آید. توابع پایه‌ای رادیال (شعاعی) براساس نرم اقلیدسی تعریف می‌شوند به این دلیل براحتی برنامه نوشته شده در یک بعد دلخواه را می‌توان با تغییراتی در داده‌های دیگر استفاده کرد. توابع پایه‌ای رادیال (شعاعی) دارای انواع مختلفی هستند که ما روی توابع گاوسی بحث می-کنیم.

در این پایان‌نامه دقت و کارایی این توابع را در تقریب توابع دویا چندمتغیره توضیح می‌دهیم و پس از این توابع برای تقریب جواب معادلات انتگرال به روش هم محلی استفاده می کنیم.استفاده از توابع پایه‌ای رادیال(شعاعی) در فضای R^s جواب بهتری می‌دهد و نهایتاً با چند مثال مقدار خطا و جواب تقریبی حاصل را برای و تقریب جواب معادلات انتگرال به روش هم محلی نشان می‌دهیم.

مقدمه:

آن‌چه که در فصل اول این پایان‌نامه به آن می‌پردازیم راجع به تابع پایه‌ای شعاعی است.

در دو دهه اخیر استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی برای درونیابی بکار گرفته شده است و برای تعداد زیادی داده در فضای $R^s(S=۱,..,N)$ جواب می‌دهد. اولین کسی که توابع پایه‌ای شعاعی را برای تقریب جواب ارائه داد کنسا[1] بود.[۱] وی معادلات حاکم بر کل دامنه کران‌دار را برای توابع پایه‌ای شعاعی اعمال کرد و سپس در شرایط درونیابی قرار داد.

در سال ۱۹۷۱ هاردی تابع پایه‌ای شعاعی را برای درونیابی سطوح نقشه برداری بکار برد و فرنک[2] در سال ۱۹۸۶ از توابع پایه شعاعی برای درونیابی تعداد زیادی داده استفاده کرد و نتایج نشان داد که تقریب خوبی حاصل می‌شود. ولی نتوانستند یکتایی جواب را ثابت کنند. میچلی[3] ثابت کرد یکی از مقادیر ویژه ماتریس حاصل از درونیابی منفی و بقیه مثبت هستند. پس سیستم دارای جواب یکتا می‌باشد.

بطور کلی انگیزه اصلی استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی، کاربرد در زمین‌شناسی، ژئوفیزیک، نقشه‌برداری و هواشناسی بوده که بعدها دارای کاربردهای دیگری نیز در حل عددی معادلات با مشتقات جزیی و حل معادلات انتگرال و ... می‌باشد.[۲و۳]

توابع پایه‌ای شعاعی بسیار سودمندند و چون براساس نرم اقلیدسی تعریف می‌شوند، در فرایند و پروسه‌ها به راحتی اعمال می شوند

[1] Kansa
[2] Franke
[3] Micchelli

و به کمک کامپیوتر کدنویسی آنها آسان است و می‌توان برنامه‌های نوشته شده در یک بعد دلخواه را با تغییراتی در داده‌های دیگر استفاده کرد.

یکی از خصوصیات توابع پایه‌ای شعاعی این است که می‌توان متغیر را در فضای چند بعدی در فضایی با بعد پایین‌تر به‌دست آورد.

توابع پایه‌ای شعاعی انواع مختلفی دارند که ما روی توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی متمرکز می‌شویم و نهایتاً ماتریس حاصل از روش هم‌محلی، معین مثبت و تُنک است.

در فصل دوم به سراغ معادلات انتگرال می‌رویم. در این به دسته‌بندی معادلات انتگرالی به فرم خطی و غیرخطی و معرفی هسته‌های انتگرال و ارائه تاریخچه‌ای از معادلات انتگرالی می‌پردازیم. و از آنجا که تعداد محدودی از معادلات انتگرالی به روش تحلیلی حل می‌شوند، لذا درفصل سوم برای یافتن جواب، به روش‌های عددی متوسل می‌شویم. در بین روشهای عددی با انتخاب روش هم‌محلی موضوع را پیگیری می‌نماییم. البته بایستی انتخاب گره‌ها با فاصله مساوی (متساوی‌الفاصله) باشد. لذا با استفاده از نقاط متساوی‌الفاصله که در این بحث روی نقاط گاوس - لژاندر – لوباتو می‌باشد موضوع را دنبال می‌کنیم و انتگرال را در بازه [۰,۱] تقریب می‌زنیم که فرم ماتریس آن نیز نشان داده می‌شود و در نهایت با ذکر چند مثال با استفاده از نرم‌افزار میپل[1] نتایج عددی را ارائه می‌کنیم.

[1] Maple

فصل اول

توابع پایه‌ای رادیال

مقدمه:

۱-۱- تاریخچه و شمای کلی

در بسیاری از رشته های علمی مجموعه ای از داده ها در دست است که می‌خواهیم قانونی بیابیم که با استفاده از آن بتوانیم اطلاعاتی به دست امده درباره فرایند مورد مطالعه در محل هایی متفاوت از آنهایی که بدست آورده ایم استنباط کنیم. لذا باید تابعی پیدا کنیم تا به برازش خوبی از داده ها دست یابیم. یکی از راههای مورد نظر تقریب می باشد که آن را با (ρf)نشان می دهیم و سعی می کنیم تقریب بر اندازه های داده شده در محل متناظر منطبق باشد، که این ایده را درونیابی می نامیم.

حال اگر داده های (x_j, y_j) که $x_j \in R^s, y_j \in R$ بطوریکه بخواهیم تابع پیوسته ρf را به گونه ای بیابیم که $\rho f(x_j) = y_j \;\;,\;\; j = ۱,...,N$ در حقیقت درونیابی کرده ایم که x_j ها مکان های اندازه گیری (مکان داده ها) و y_jها اندازه های متناظر (مقدار داده ها) می باشند و ما غالباً فرض می کنیم که این مقادیر توسط نمونه گیری از تابع f در مکان داده ها بدست آمده است.اینکه x_jها می‌توانند در فضای s-بعدی R^s واقع شوند به این معناست که با فرم $\rho f(x_j) = y_j$ می توان مسائل مختلفی را حل کرد.

ایده ی راحت و معمول برای حل مسائل این است که فرض کنیم تابع ρf ترکیب خطی از توابع پایه ای مشخص شده B_kاست یعنی $\rho f(x) = \sum_{k=۱}^{N} C_k B_k(x) \quad , x \in R^s$

حل مسئله درونیابی منجر به تشکیل سیستم معادلات خطی $AC = y$ می شود که اجزای آن ماتریس درونیابی A بصورت $A_{jk} = B_k(x_j) \;\;,\;\; j,k = ۱,...,N$ و بردارهای $C = [C_۱,...,C_N]^T$ و $y = [y_۱,...,y_N]^T$ می‌باشد. [۴] می دانیم پاسخ زمانی وجود داشته ویکتاست (خوش وضع است)که اگر وتنها و اگر ماتریس A نامنفرد باشد.به منظوربدست آوردن فضاهای تقریب ابتدا به معرفی ماتریس ها و توابع معین مثبت می‌پردازیم.

۱-۲- ماتریسها و توابع معین مثبت:

ماتریس معین مثبت یک مفهوم استاندارد در جبر خطی است. با این وجود ما تعریف خاصی از آن را به منظور برقراری ارتباط با توابع معین مثبت ارائه می‌دهیم.

۱-۲-۱- تعریف ماتریس حقیقی نیمه معین مثبت:

ماتریس حقیقی متقارن را نیمه معین مثبت گوییم هرگاه فرم درجه دوم متناظرش نامنفی باشد یعنی $\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_j c_k \ A_{jk} \geq 0$

برای هر $C = [c_1,\ldots,c_N]^T \in R^N$. اگر تنها بردار C که رابطه بالا را به تساوی تبدیل کند، بردار صفر باشد آنگاه A را معین مثبت گوییم یکی از ویژگیهای ماتریسهای معین مثبت این است که مقادیر ویژه‌ی آنها مثبت است بنابراین یک ماتریس معین مثبت نامنفرد است. ولی عکس این موضوع الزاماً برقرار نیست.[۴]

خواص ماتریس های معین مثبت :

۱- همواره وارون پذیرند.

۲- عناصر روی قطر اصلی، مثبت هستند.

۳- همهٔ مقادیر ویژه مثبت هستند.

۴- مجموع ماتریس های معین مثبت، معین مثبت است.

۵- ترکیب خطی ماتریس های معین مثبت، معین مثبت است.

لذا اگر ما توابع پایه ای B_k را به گونه ای داشته باشیم که ماتریس درونیابی متناظرشان معین مثبت باشد، آنگاه همیشه با مسأله درونیابی خوش وضع روبرو خواهیم شد چون وارونشان موجود است.. پس باید مفهوم تابع معین مثبت را ارائه دهیم.

۱-۳- مقدمه‌ای بر تابع معین مثبت:

توابع معین مثبت، اولین بار در اوایل قرن ۲۰ در حوزه ی آنالیز کلاسیک معرفی شدند در دهه ۱۹۲۰ ظاهراً ماتیاس[1] برای اولین بار توابع معین مثبت را معرفی کرده و مورد مطالعه قرار داد. بنظر می آید تا زمانی که میچلی [۵][2] ارتباط بین درونیابی و توابع معین مثبت را برقرار کرد لزومی برای مطالعه توابع اکیداً مثبت احساس نمی شد ولی به مرور مشخص شد که تابع معین مثبت با ماتریس نیمه معین مثبت رابطه دارد وقتی مقالات اخیر مطالعه می شود (توابع پایه ای شعاعی) برخی از مؤلفین درصدد اصلاح این بر آمدند از این رو به توابع اکیداً معین مثبت همانند توابع معین مثبت ارجاع داده می شود. [۴]

معمولاً، توابع معین مثبت با توابع مختلط تعریف می شود و از ضرایب مختلط C نیز استفاده می شود. به ویژه، قضیه معروف [3] بوچنر (در فصل بعد) یک توصیف دقیق از توابع معین مثبت مختلط را به ما می دهد ولی در کاربرد ما با توابع حقیقی کار می کنیم.

ما می توانیم از توابع اکیداً معین مثبت به عنوان توابع پایه ای استفاده کنیم یعنی در فرم $\rho f\ (x)=\sum_{k=1}^{N} c_k\ B_k(x)$ می توانیم بجای $\mathrm{B_k(x)}$ از تابع $(\mathrm{x}\in \mathrm{R^s})\phi(\mathrm{x}-\mathrm{x_k})$ استفاده کنیم تابع ρf در بالا که از درونیابی نتیجه شده است انتقالی پایاست یعنی درونیابی داده های انتقال یافته با انتقال درونیاب داده های اصلی برابر است.

و بالاخره می توان به فرم $(\mathrm{x}\in \mathrm{R^s})\rho f\ (\mathrm{x})=\sum_{\mathrm{k}=۱}^{\mathrm{N}} \mathrm{c_k}\phi(\mathrm{x}-\mathrm{x_k})$ دست یافت و با این تعریف به مفهوم هسته های اکیداً معین مثبت به صورت $\phi(\mathrm{x},\mathrm{y})$ تعمیم داد.

۱-۳-۱ تعریف تابع معین مثبت:

تابع پیوسته و مقدار حقیقی ϕ را روی R^s معین مثبت گوییم، اگر و تنها اگر زوج باشد و برای

1- Mathias
2- Micchelli
3 Bochner's Theorm

هر N گره دو به دو مجزای $x_1 ... x_N \in R^s$ و بردار $C = [c_1 ... c_N]^T \in R^N$ داشته باشیم به طوری که: [۴]

$$\sum_{j=۱}^{N} \sum_{j=۱}^{N} c_j c_k \phi(x_j - x_k) \geq ۰ \qquad (۱-۲-۱)$$

تابع ϕ را روی R^s اکیداً معین مثبت گوییم، هرگاه تنها بردار C که رابطه (۱-۲-۱) را به تساوی تبدیل می‌کند بردار صفر باشد

. مثال: نقطه y را در R^s ثابت فرض کنید در این صورت تابع $\phi(x)=e^{xy}$ روی R^s معین مثبت است چرا که فرم درجه دوم تعریف تابع معین می باشد:

$$\sum_{j=۱}^{N} \sum_{k=۱}^{N} c_j c_k (x_j - x_k) = \sum_{j=۱}^{N} \sum_{k=۱}^{N} c_j c_k e^{(x_j - x_k) y}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} c_j e^{x_j \cdot y} \sum_{k=1}^{N} c_k e^{x_k \cdot y} = \left[\sum_{j=1}^{N} c_j e^{x_j \cdot y} \right]^2 \geq 0$$

۱-۴- توابع شعاعی

در بسیاری از کاربردها، داشتن پایایی نه فقط تحت انتقال بلکه تحت دوران و بازتاب نیز مفید است در نتیجه توابع معین مثبت، باید شعاعی نیز باشد توابع شعاعی تحت همه ی تبدیلات اقلیدسی (انتقال، دوران، بازتاب) پایا[1] هستند. چون تبدیلات اقلیدسی توسط ماتریس های تبدیل متعامد مشخص می شوند و در نتیجه نرم – پایا می باشند.

۱-۴-۱- تعریف تابع شعاعی:[۷] , [۶] , [۸]

تابع $\phi : R^s \to R$ شعاعی گفته می شود به شرط آن که تابع تک متغیری مانند $\varphi : [۰,\infty) \to R$ وجود داشته باشد بطوریکه:

$$\boldsymbol{\phi(x) = \varphi(r), \quad x \in R^s}$$

[1] invariant

که در آن $r=\|x\|$ و $\|\cdot\|$ یک نُرم (معمولاً نرم اقلیدسی) روی R^S است.

در حقیقت از تعریف بالا داریم که برای تابع شعاعی ϕ

$$\|x\| = \|y\| \Rightarrow \phi(x)=\phi(y) \qquad x, y\in R^s$$

در حقیقت عاملی که باعث کاربرد توابع شعاعی است این است که به جای کار با تابع چند متغیره ϕ (که پیچیدگی آن با افزایش بعد بیشتر می شود) می توانیم با تابع تک متغییری φ مشابه برای هر انتخاب S کار کنیم تابع تک متغیره φ را روی R^S تابع شعاعی (اکیداً) معین مثبت گوییم اگر و تنها اگر تابع چند متغیره ϕ وابسته به آن روی R^S مطابق تعریف معین مثبت و شعاعی باشد.

یکی از بحث های مهم ریاضیات کاربردی تقریب توابع می باشد معمولاً برای تقریب تابعی مانند f ، آن را به صورت ترکیب خطی از توابع پایه ای (متناهی) می نویسند. یعنی :

$$f \cong \bar{f} = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

که در این رابطه $\{u_1 ... u_n\}$ پایه از توابع مشخص و n یک عدد طبیعی می باشد و c_i ضرایب حقیقی هستند. که باید این ضرایب را بدست بیاوریم. برای بدست آوردن این ضرایب روش های مختلفی مانند روش کمترین مربعات، روش توابع وزنی و درونیابی وجود دارد. در این جا ما از درون یابی استفاده می کنیم.

درروش درون یابی معمولاً n گره متمایز را در نظر می گیرند؛ و با اعمال شرایط درون یابی در n گره روابط زیر را تشکیل می دهیم:

$$\lambda_j = f(x_j) = \bar{f}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x_j) \qquad 1\le j \le n \qquad (۱-۴-۱)$$

(حداقل یکی از c_i ها مخالف صفر است)

رابطهٔ (۱-۴-۱) یک سیستم خطی با n معادله و n مجهول می باشد. که شکل ماتریسی آن به صورت زیر می باشد.

$A.C=\lambda$ بطوریکه :