بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه رازی
دانشکده علوم‌پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد رشته‌ی ریاضی گرایش کاربردی

عنوان پایان نامه

توابع درونیاب فراکتالی اسپلاین مکعبی تعمیم‌یافته

استاد راهنما:

دکتر محمدتقی درویشی

نام دانشجو:

سید روح‌اله دانشمند

مهرماه ۱۳۸۷

دانشگاه رازی

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش کاربردی

سید روح اله دانشمند

تحت عنوان:

توابع درونیاب فراکتال اسپلاین مکعبی تعمیم یافته

درتاریخ ۱۳۸۷/۷/۲۱ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ۱۸٫۷۵ به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر محمدتقی درویشی با مرتبه ی علمی دانشیار — امضاء

۲- اساد داور داخل گروه دکتر کیوان امینی با مرتبه ی علمی استادیار — امضاء

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر محمد رضا پیغامی با مرتبه ی علمی استادیار — امضاء

تقدیر و سپاس

اکنون که زحمت این مهم با عنایت باریتعالی به بار نشست لازم دانستم مراتب سپاسگزاری خود را از استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمدتقی درویشی که مرا در این مسیر بسیار یاری نمودند و استاد ارجمند جناب آقای دکتر عبدالعزیز عبدالهی استاد دانشگاه شیراز که با راهنماییهای عالمانه خویش این مسیر را برایم هموار نموده و پسر عموی عزیزم آقای کورش دانشمند که مرا بیش از پیش مورد لطف قرار دادند، و همچنین از دوستان عزیزم آقایان مهران عظیم بیگی، مسعود آهو خوش، مهدی جعفرنژاد، عباس نظافتی و محمد یار احمدی که بسیار مرا مورد عنایت قرار دادند به جا آورم.

تقدیم به

مادر مهربانم

آنکه مهر و عاشقانه زیستن را در وجودم جاودانه ساخت

و

پدر عزیزم

آنکه امید و صبر را تجلی خاست‌گاه وجودی ام نمود

چکیده.

در فصل اول راجع به انواع درونیابی از جمله درونیاب اسپلاین مکعبی توضیح خواهیم داد. در فصل دوم تعاریفی از هندسه فراکتالی و ابعاد فراکتال‌ها بیان می‌کنیم و به تشریح تابع فراکتال، تابع درونیاب فراکتال (FIF) و تابع فراکتال از دسته C^r (C^r ـ FF) خواهیم پرداخت. اما در فصل سوم هدف اصلی خود که روش ساختن توابعی هموار به عنوان تقریب‌هایی مناسب از یک تابع فراکتال می‌باشد، را شرح می‌دهیم. C^rـ تابع درونیاب فراکتالی (C^r ـ FIF) تعمیم یافته f را با تعیین هرترکیبی از r مقدار مشتقات $f^{(k)}$، $k=1,2,\ldots,r$، از نقاط مرزی بازهٔ $I=[x_0 , x_N]$ شکل می‌دهیم. ایدهٔ ما پایان دادن به سؤالات مختلفی از Barnsley و Harrington می‌باشد، که چه وقت ساختن تابع f فقط به تعیین مقادیر $f^{(k)}$ در کران پایین بازه I محدود نمی‌شود؟ در مجموع، حتی وقتی که r معادله شامل $f^{(k)}(x_0)$ و $f^{(k)}(x_N)$ به ازای $k=1,2,\ldots,r$ تعیین می‌شوند، روش ما برای ساخت FIFـ C^r هم به خوبی کار می‌کند. با توجه به محدودهٔ وسیع کاربردهای اسپلاین‌های مکعبی کلاسیک در مسائل مختلف ریاضی و مهندسی، ساختمان صریح FIFاسپلاین مکعبی $f_\Delta(x)$ از طریق گشتاورها شکل می‌گیرد. یعنی ایدهٔ اصلی کار ساختن یک FIFــ C^r مبنی بر FIF اسپلاین مکعبی می‌باشد. نشان داده می‌شود که دنبالهٔ $\{f_{\Delta_k}(x)\}$ به تابع تعریف شدهٔ $\phi(x)$ روی حداقل دو دسته از دنباله‌های شبکه‌ها به سرعت همگرا می‌شود وقتی که نرم شبکه $\|\Delta_k\|$ به طور مجذوری به صفر میل می‌کند، و پیوسته بودن $\phi^{(r)}(x)$ روی I برای $r=2,3$ یا $r=4$ میسر می‌گردد.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فهرست شکل‌ها

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فهرست جدول‌ها

فصل سوم

مخففها و کوتاه‌نوشته‌ها

Iterated Function System .... (IFS)
Fractal Interpolation Function .... (FIF)
C^r-Fractal Function .... (C^r -FF)
C^r-Fractal Interpolation Function .... (C^r -FIF)

پیشگفتار

با ابداع هندسه فراکتالی [۲]، استفاده از مدلهای فراکتالی قطعی یا احتمالی [۵ ,۴ ,۳] برای فهم ودرک پیچیدگیها در طبیعت و تجربیات علمی مختلف به طورچشمگیر بالا گرفت. Hutchinson [۶] روی مدل فراکتال قطعی مبنی بر قضیه دستگاه تابع تکراری(IFS) تحقیق کرد. Barnsely [۷ ,۳] با استفاده از IFS، مفهوم تابع درونیاب فراکتالی (FIF) برای تقریب توابعی که به طور طبیعی یافت می‌شوند و نمایش انواعی از اشکال خود- متشابه تحت بزرگنمایی، را معرفی می‌کند. یک FIF نقطه ثابت عملگر Read-Bajraktarevic روی فضاهای تابعی مختلف می‌باشد. به طور کلی، FIFs آفین‌ها توابع مشتق‌ناپذیر هستند و بُعد فراکتال نمودارهایشان غیرصحیح می‌باشد. ایجاد کدهای FIF یک فن قوی برای فشرده‌سازی تصاویر، گفتارسازی، سریهای زمانی و غیره فراهم می کند، [۱۰ ,۹ ,۸] .

اگر داده‌های آزمایشی (تجربی) با یک C^r ـ FIF تقریب زده شوند، آنگاه از بعد فراکتال $f^{(r)}$ می‌توان به عنوان پارامتر عددی برای تحلیل داده‌های آزمایشی استفاده کرد. تفاوت C^r ـ FIF مشتق‌پذیر با درونیاب اسپلاین کلاسیک در این است که C^r ـ FIF با یک رابطهٔ تابعی خود- متشابه بودن را روی مقیاس‌های کوچک معلوم می کند. Barnsaly و Harrington [۱] یک روش جبری برای ساختن یک دسته محدود از FIF ـ C^r f، معرفی کردند که داده‌های معلوم با مقادیر معین $f^{(k)}$، به‌ازای $k = ۱,۲,\ldots,r$، در کران پایین بازه را، درونیاب می کند. به هرحال، بنای روش آنها، نسبت به شرایط مرزی تصریح شدهٔ مشابه برای اسپلاین کلاسیک مشکل به نظر می‌رسید. Massopust [۱۱] سعی کرده است این کار را با طرح‌ریزی روی سطوح فراکتال هموار با استفاده از انتگرال گیری تعمیم دهد.

در این پروسه روش ساختن یک تابع C^r ـ FF بدون نیاز به تعیین مقادیر انتگرال‌های FIF معلوم فقط در کران پایین $(x_۰)$ معرفی می‌شود. بنابراین، تابع C^r ـ FF وقتی که r مقدار متوالی انتگرال‌های یک FIF در هر ترکیبی روی نقاط مرزی بازه تعیین شوند، ساخته می‌شود. بعلاوه، یک روش کلی ساخت یک C^rـFIF درونیاب برای داده‌های تعیین‌شده با همهٔ شرایط مرزی ممکن مطرح می گردد. روش جبری پیچیدهٔ مطرح‌شده در [۱] از ماتریس‌های پیچیده و انواع خاصی ازشرایط انتهایی استفاده می کند.کاربرد روابط تابعی موجود بین مقادیر C^r ـ FIF که شامل کرانه‌های بازه می‌باشند، ایده ما را از روش جبری پیچیده در [۱] بی‌نیاز می کند. روش ما به ابهامات مختلف Barnsley و Harrington در [۱] از قبیل: (i) چه شرایط نقطه

مرزی، یک C^r ـ FIF یکتا را نتیجه می‌دهد، (ii) چه اتفاقی می‌افتد اگر جهت مقیاس‌های افقی تغییر کند و (iii) در این صورت چگونه قضیه انتگرال‌های گشتاور طرح‌ریزی می گردد، پایان می‌دهد.

فایده ساختمان FIF اسپلاین آن است که، برای داده‌های تعیین شده و شرایط مرزی معلوم، می‌توان تعداد نامتناهی از FIFs اسپلاین‌های وابسته به عامل‌های مقیاس عمودی داشت، در نتیجه یک انعطاف‌پذیری وسیع در انتخاب C^r ـ FIFs مشتق‌پذیر برطبق نیاز یک تجربه (آزمایش) وجود دارد.

به علت اهمیت اسپلاین‌های مکعبی در گرافیک‌های کامپیوتر، CAGD، FEM، معادلات دیفرانسیل ،کاربردهای مهندسی مختلف [۱۵ ,۱٤ ,۱۳ ,۱۲]، FIF اسپلاین مکعبی $f_\Delta(x)$ روی یک شبکه Δ از طریق گشتاورهای $M_n = f''_\Delta(x_n)$، $n = ۰,۱,۲,\ldots,N$، ساخته می‌شود. FIFs اسپلاین مکعبی می‌توانند همه انواع شرایط مرزی اسپلاین کلاسیک را داشته باشد. نشان داده می‌شود که دنبالهٔ $\{f_{\Delta_k}(x)\}$ به تابع تعریف شدهٔ $\phi(x)$ روی حداقل دو دسته از دنباله‌های شبکه‌ها به سرعت همگرا می‌شود وقتی که نرم شبکه $\|\Delta_k\|$ به طور مجذوری به صفر میل می کند، و پیوسته بودن $\phi^{(r)}(x)$ روی I برای $r = ۲,۳$ یا $r = ۴$ را بدست می‌دهد.

در فصل اول به بررسی توابع درونیاب در انواع مختلف از جمله اسپلاین مکعبی و روش ساخت آن می‌پردازیم. در فصل دوم تعریف فراکتال، ابعاد نمودارهای فراکتالی، دستگاه تابع تکراری، تابع فراکتال، تابع درونیاب فراکتال و تابع درونیاب فراکتال تعمیم‌یافته را شرح می‌دهیم. در فصل سوم تعدادی نتایج پایه‌ای برای FIFs معلوم می‌شود و نیز روش کلی برای ساخت یک C^r ـ FIF با شرایط مرزی مختلف بعد از شکل گیری حساب پایه‌ای $C^۱$ ـ FIFs تصریح و ساختمان یک FIF اسپلاین مکعبی تعمیم‌یافته با همه شرایط مرزی ممکن، در اسپلاین‌های کلاسیک شرح داده می‌شود. همچنین دو دسته از دنباله‌های شبکه‌ها تعریف می‌شوند و همگرایی دنبالهٔ مناسبی از FIFs اسپلاین مکعبی $\{f_{\Delta_k}(x)\}$ به $\phi \in C^r[x_۰, x_N]$، برای $r = ۲,۳$ یا $r = ۴$، ثابت می‌شود. در پایان، نتایج بدست آمده را با آوردن مثال‌های معینی از FIFs اسپلاین‌های مکعبی برای داده‌های معلوم و دو مجموعهٔ مختلف از عامل‌های مقیاس عمودی شرح می‌دهیم.

فصل اول

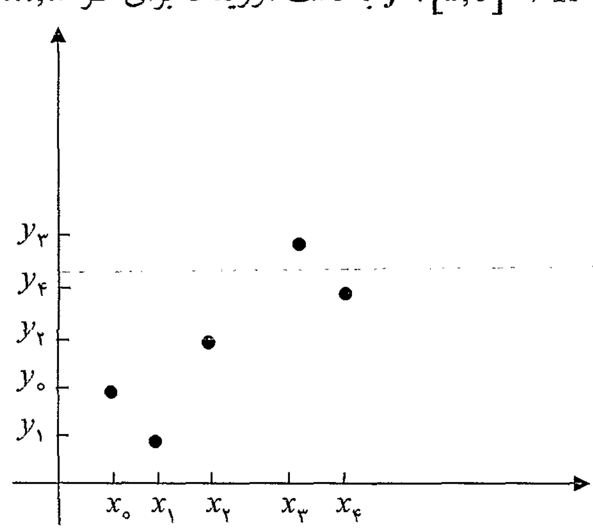
توابع درونیاب

کار اساسی آنالیز عددی، تقریب توابعی است که اطلاعات ناقصی از آنها داریم. به خصوص توابعی که هیچ جا مشتق پذیر نیستند و اساس کار ما روی این‌گونه توابع است که تابع وایراشتراس از جمله این توابع می‌باشد. در این‌گونه کاربردها اگر تابع f تابع مورد نظر باشد بهتر است تابعی تقریبی به نام $\hat{f}$ ساخته شود تا به عنوان جایگزینی برای f استفاده شود. در این فصل روش‌های ساخت $\hat{f}$ را به کمک درونیابی[۱] بررسی می کنیم.

۱-۱ درونیاب چندجمله‌ای

فرض‌کنیم مقادیر تابع f در یک مجموعهٔ $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ از نقاط مجزای داخل بازهٔ $[a,b]$ معلوم است. فرض‌کنیم $x_0 = a$ و $x_n = b$ و اینکه نقاط طوری اندیس‌گذاری شده‌اند که $x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n$ آن طورکه شکل(۱-۱) نشان می‌دهد. x_iها را گره[۲] گوییم و مقادیر معلوم تابع را در این نقاط، یعنی $f(x_i)$ را با y_i نمایش می‌دهیم. در بسیاری از کاربردها این مسأله مطرح است:

یک تابع تقریب $\hat{f} : [a,b] \to \mathbf{R}$ به دست آورید که برای هر $i = 0,1,\ldots,n$ در $\hat{f}(x_i) = y_i$ صدق کند.



شکل ۱-۱ : شبکه‌ای روی $[a,b]$ با نقاط معلوم (x_i, y_i) روی نمودار تابع

۱. Interpolation
۲. Knot

به عبارت دیگر، تابعی بیابید که از نقاط معینی روی نمودار f بگذرد و روی تمام بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده باشد. به این مسأله **درونیابی** گویند.

یک جواب برای این مسأله این است که چندجمله‌ای $\hat{f}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ را از این نقاط معلوم (x_i,y_i) بگذرانیم. زوج مرتب (x_i,y_i) را نقاط **تکیه‌گاهی**[1] می‌نامیم. x_iها را طول تکیه‌گاه و y_i را مختص تکیه‌گاه نامیم. برای بدست آوردن این چندجمله ای نیاز به محاسبهٔ $n+1$ ضریب a_i با حل دستگاه معادلات حاصل از $\hat{f}(x_i)=y_i$ به ازای $i=0,1,\ldots,n$ داریم، که این کار هزینه بر است و تنها اطلاعات خیلی کلی در اختیار می‌گذارد. در عوض، مسأله درونیابی ساده‌ای را در نظر می‌گیریم که یکی از عرضهای معلوم، y_i، مقدار ۱ و بقیه آنها ۰ باشد. چندجمله‌ای L_i از درجهٔ n که در $x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ صفر باشد باید مضربی از چندجمله‌ای $(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)$ باشد.

اکنون برقراری شرط $L_i(x_i)=1$ را اعمال می‌کنیم.

عبارت $L_i(x)=\dfrac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$، در $x=x_i$ دارای مقدار ۱ است. پس این چندجمله‌ای مسأله درونیابی ساده را که در آن $y_i=1$ و بقیه عرضها $y_i=0$ است، حل می‌کند. می‌توانیم قرار دهیم

$$L_i(x)=\frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)}، \qquad (1\text{-}1\ (\text{آ}))$$

که در آن

$$\omega_n(x):=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n). \qquad (1\text{-}1\ (\text{ب}))$$

این مسأله ساده به یک جواب مناسب $\hat{f}$ برای مسألهٔ درونیابی که در آن $y_0,y_1,\ldots,y_n$ عرض‌های دلخواهی هستند منجر می‌شود. چون هر کدام از چندجمله‌ایهای $L_0,L_1,\ldots,L_n$ در همهٔ نقاط x_j بجز یکی صفر است و می‌توان با ضرب هرکدام از آنها در مضربی مناسب و جمع نتایج حاصل به جوابی برای مسأله کلی‌تر دست یافت، چندجمله‌ای حاصل $\hat{f}$ به این صورت است

$$\hat{f}(x)=\sum_{i=0}^{n}y_iL_i(x). \qquad (1\text{-}2)$$

چندجمله‌ای (۱-۲) را فرمول **درونیابی لاگرانژ**[2] می‌نامیم.

عیب این روش این است که اگر نقطه‌ای به داده‌ها اضافه شود تمام محاسبات بایستی مجدداً بهنگام گردد.دیگر اینکه محاسبه چندجمله‌ایهای درونیاب‌کنندهٔ لاگرانژ L_i هزینه‌بر است.

---

۱. Support points

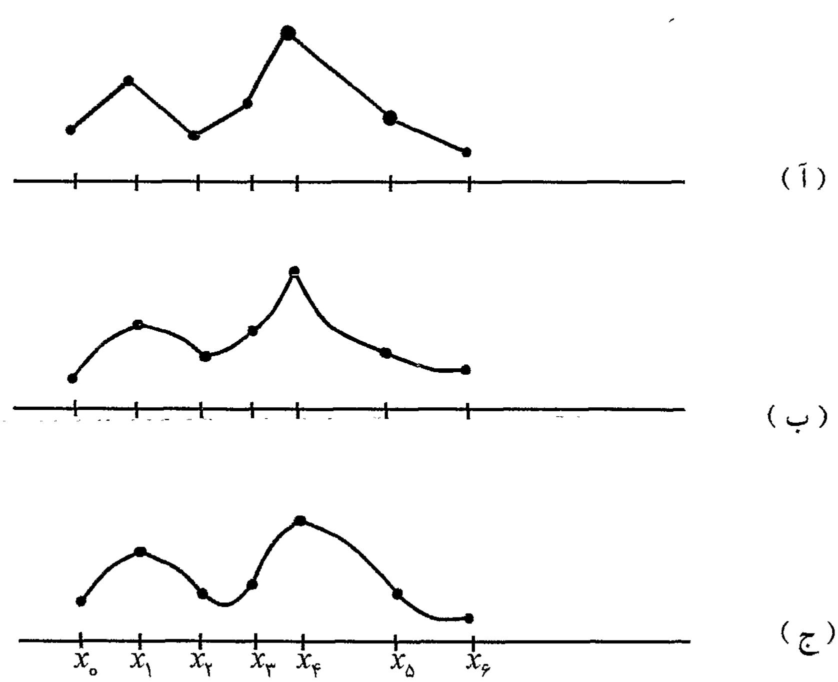
۲. Lagrange Interpolating

درونیابی توسط چندجمله‌ایها هرچند در بسیاری مواقع مناسب است اما با توجه به خاصیت نوسانی بودن چندجمله‌ایهای از درجه بالا معمولاً کاربرد آنها در تقریب بسیاری از مسائل که عملاً پیش می‌آید محدود می‌شود.

۱-۲ درونیاب قطعه‌ای[۱] چندجمله‌ای

در این بخش، دربارهٔ روشی برای دخالت تعداد زیادی از نقاط (x_i, y_i) در ساخت درونیاب تابع f، بدون نیاز به استفاده از چندجمله‌ایهای درجه بالا بحث می‌کنیم.

هدف این است که یک درجهٔ ماکزیمم n برای چندجمله‌ایهای بکار رفته در درونیابی، ثابت در نظر گرفته شود. آنگاه برای یک **شبکه**[۲] Δ روی $[a,b]$ قطعه‌های چندجمله‌ایها را روی زیربازه‌هایی از $[a,b]$ که به طور مناسب انتخاب شده‌اند کنار هم قرار دهیم. نتیجه این کار، یک تک درونیاب $\hat{f}$ است که روی زیربازه‌های مختلف با چندجمله‌ایهای متفاوت از درجهٔ حداکثر n مطابقت دارد. این روش درونیاب قطعه‌ای چندجمله‌ای، بزرگ بودن n، تعداد کل نقاط شبکه‌ای را ممکن می‌سازد، بدون اینکه متأثر از آثار ویرانگر احتمالی عامل $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ در برآورد خطای درونیاب چندجمله‌ای باشد.



شکل ۱-۲ : درونیاب‌های قطعه‌ای چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر (آ) $n = 1$، (ب) $n = 2$، (ج) $n = 3$.

---

۱. Piecewise
۲. Mesh

برای تشریح حالت $n=1$، یک شبکه $\Delta=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ روی $[a,b]$ به همراه یک مجموعه ازعرضهای $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ متناظر به مقادیر f در گره‌ها را در نظر می‌گیریم. هر جفت نقطه (x_i, y_i)، (x_{i+1}, y_{i+1}) از نقاط معلوم متوالی روی نمودار f یک کمان چندجمله‌ای درجهٔ $n=1$ (یعنی قطعه خط) ر روی زیربازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ تعریف می کند. نتیجه حاصل به عنوان درونیاب قطعه‌ای خطی شناخته می‌شود و عبارت است از درونیاب $\hat{f}$ که هر دو نقطهٔ متوالی معلوم روی نمودار f را با یک خط به هم وصل می‌کند مانند شکل (۱-۲ (آ))

حالت $n=2$ قدری پیچیده‌تر است. در این حالت سه نقطه‌ای‌های متوالی (x_i, y_i)، (x_{i+1}, y_{i+1})، (x_{i+2}, y_{i+2})، روی نمودار f، روی زیربازه‌های به صورت $[x_i, x_{i+2}]$ کمانهای مربعی را تعریف می کنند. نکته مهم این ساختار این است که مطمئن شویم درونیاب حاصل $\hat{f}$ برای هر $x \in [a,b]$ یک مقدار منحصر به فرد دارد. شکل (۱-۲ (ب)) اینگونه درونیاب را نشان می‌دهد. به همین خاطر قبل از ساخت درونیاب قطعه‌ای مربعی، $[a,b]$ را به زیربازه‌های $[x_0, x_2]$، $[x_2, x_4]$،...، $[x_{n-2}, x_n]$، افراز می کنیم. درونیاب‌های قطعه‌ای مکعبی (درجه سه) را به طور مشابه می‌سازیم. ابتدا $[a,b]$ را به اجزاء $[x_0, x_3]$، $[x_3, x_6]$، ...، $[x_{n-3}, x_n]$ افراز می کنیم. این نوع افراز نیاز دارد که n عدد صحیح و بخش‌پذیر بر ۳ باشد. آنگاه هر چهارنقطه‌ای (x_i, y_i)، (x_{i+1}, y_{i+1})، (x_{i+2}, y_{i+2})، (x_{i+3}, y_{i+3}) روی نمودار f یک کمان مکعبی روی جزء $[x_i, x_{i+3}]$ را تعریف می کند. حاصل این کار، درونیاب $\hat{f}$ است، مشابه آنچه در شکل (۱-۲ (ج)) رسم شده است.

تمام نمودارهای شکل (۱-۲) پیوسته‌اند. در حالت کلی، درونیاب‌های ما در نقاط مرزی اجزاء مشتق‌پذیر نخواهند بود. بنابراین به عنوان یک تقریب فراگیر، درونیاب‌های قطعه‌ای چندجمله‌ای که برطبق روند فوق ساخته می‌شوند نوعا" به $C^0([a,b])$ تعلق دارند و برای هر $k \succ 0$ به $C^k([a,b])$ متعلق نیستند.

۱-۳ درونیاب هرمیت[1]

گاهی ساخت درونیاب‌هایی که از همواری مراتب بالاتر برخوردار است مفید است. برای مثال، بعضی کاربردها به درونیاب‌هایی نیاز دارند که به طور فراگیری مشتق‌پذیرند. هدف ساختن چندجمله‌ای درونیاب $\hat{f}$ به صورت ترکیبی خطی از تابع f ومشتقات آن در نقاط گره‌ای است.

---

۱. Hermite Interpolation

۱-۳-۱ درونیاب هرمیت ساده

هدف یافتن یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر $2n+1$ مانند $\hat{f}$ است بطوریکه به ازای $i=0,1,\ldots,n$

$$\hat{f}(x_i)=f(x_i)=f_i$$

$$\hat{f}'(x_i)=f'(x_i)=f_i'$$

فرض کنیم فرم چندجمله‌ای مورد نظر به صورت زیر باشد

$$\hat{f}(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k Q_k(x)+\sum_{k=0}^{n} f_k' H_k(x)$$

در نتیجه

$$\hat{f}'(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k Q_k'(x)+\sum_{k=0}^{n} f_k' H_k'(x).$$

با توجه به شرایط مسأله توابع H_k و Q_k بایستی در روابط زیر صدق کنند

$$\begin{cases} H_k(x_i)=0 \\ Q_k(x_i)=\delta_{ki} \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} H_k'(x_i)=\delta_{ki} \\ Q_k'(x_i)=0 \end{cases}$$

به ازای هر $i=0,1,\ldots,n$.

مـی‌تـوان نشـان داد $H_k(x)=(x-x_k)L_k^2(x)$ و $Q_k(x)=(-2L_k'(x_k)(x-x_k)+1)L_k^2(x)$، کـه هـر دو حداکثر از درجه $2n+1$ می‌باشند.

۱-۳-۲ درونیاب هرمیت کامل

در این حالـت فـرض مـی‌کنـیم مقـدار تـابع و مقـدار چنـد مشـتق اول آن در نقـاط متمـایز x_0، x_1، ...، x_n معلوم باشد یعنی $(x_i, y_i^{(j)})$ که $j=0,1,\ldots,m_i$ و $i=0,1,\ldots,n$، که درآن $\sum_{i=0}^{n}(m_i+1)=d+1$.

برای تشکیل چندجمله‌ای درونیاب هرمیت نقاط $(x_i, y_i^{(j)})$ را m_i+1 مرتبه تکرار می‌کنیم و برای ایـن نقاط، جدول تفاضلات تقسیم شده را تشکیل می‌دهیم و در صورت نیاز از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

$$f[\underbrace{x_i, x_i, \ldots, x_i}_{(m_i+1)-ih}]=\frac{f^{(m_i)}(x_i)}{(m_i)!}$$

$\hat{f}$ باید مضربی از چندجمله‌ای $(x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}\ldots(x-x_n)^{m_n+1}$ و مشتقات آن باشد که ضرایب آن با استفاده از رابطهٔ بالا به دست می‌آید.

۴-۱ درونیاب اسپلاین[۱]

در بعضی کاربردها درونیاب‌هایی لازم است که هموارتر از چندجمله‌ایهای قطعه‌ای لاگرانژ باشد. البته استفاده از چندجمله‌ایهای هرمیت به دانستن مقادیر مشتق در گره‌ها نیاز دارد. داشتن این مقادیر نه همیشه امکان دارد و نه اینکه ضرورتی دارد. می‌توان به طور عددی یک منحنی درونیاب کننده هموار از مجموعه‌ای از نقاط (x_i, y_i) گذراند بدون اینکه مقادیر شیب را بدانیم. مسأله بدین صورت است: یک افزار $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ روی $[a,b]$ و مجموعه‌ای از مقادیر $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ از عرض‌های متناظر داده شده و تابع $s \in C^1([a,b])$ را بدست‌آورید که $s(x_i) = y_i$ برای $i = 0,1,\dots,n$.

هنرمندان گرافیست قدیمی از یک نوار نازک انعطاف‌پذیر به نام «اسپلاین» به منظور رسم منحنی‌های هموار که از نقاط مشخص شده بگذرد، استفاده می‌کردند. این تعریف ملزم می‌کند تا تابع درونیاب s مبتنی بر داده‌های مسأله روی شبکه Δ تعریف شده در بخش (۱-۲)، قطعه‌ای درجه سه باشد و روی $[a,b]$ دوبار بطور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. هدف این بخش این است تا نشان دهیم اینگونه توابع وجود دارد و بعضی از خواص آنها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱-۱. تابع s را اسپلاین درجه k می‌نامیم هرگاه:

آ) دامنهٔ s یک بازه مانند $[a,b]$ باشد.

ب) $s, s', \dots, s^{(k-1)}$ روی $[a,b]$ پیوسته باشند.

پ) نقاط متمایز x_i (نقاط گره‌ای s) وجود دارند بطوریکه $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ و s یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر k روی هر زیربازه $[x_i, x_{i+1}]$ بازای $i = 0,1,\dots,n$.

حالت $k=1$ را اسپلاین خطی، و حالت $k=2$ را اسپلاین مجذوری، و حالت $k=3$ را اسپلاین مکعبی گوییم.

۱-۴-۱ اسپلاین خطی[۲]

فرض کنیم $(n+1)$ نقطهٔ $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ معلوم داده شده‌اند، و اگر بدون خللی در کلیت فرض کنیم $x_0 < x_1 \dots < x_n$. لذا $s(x)$ تعریف شده در زیر با شرایط $s_i(x_i) = y_i$ و $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$، بازای $i = 0,1,\dots,n-1$، اسپلاین خطی است.

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) & x_0 \le x \le x_1 \\ s_1(x) & x_1 < x \le x_2 \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases} \qquad (۳-۱)$$

۱. Spline
۲. Linear Spline