بسم الله الرّحمن الرّحيم

دانشگاه شیراز

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (گرایش جبر)

ایده الها و زیرمدولهای، مدولهای ضربی

به وسیله ی :

محمد رویین تن

استاد راهنما:

دکتر نمازی

شهریور ماه ۱۳۸۷

به نام خدا

ایده الها و زیرمدولهای، مدولهای ضربی

به وسیله ی :

محمد رویین تن

پایان نامه:

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ی:

ریاضی محض (گرایش جبر)

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه :......عالی...............................

دکتر شهره نمازی ،استاد یار بخش ریاضی (رئیس کمیته):.........................

دکتر حبیب شریف ، استاد بخش ریاضی:...

دکتر عبد الرسول عزیزی ، استاد یار بخش ریاضی:..........................

شهریور ماه ۱۳۸۷

تقدیم به

ساحت مقدس امام زمان علیه السلام

ونیز تقدیم به

پدرو مادر عزیزم

سپاسگزاری

اکنون که با لطف خداوند متعال این مرحله از تحصیل خود را با موفقیت به اتمام رسانده ام ، برخود واجب می‌دانم که از زحمات استاد گرامی ،خانم دکتر نمازی که همواره با صبروحوصله راهنما ومشوق اینجانب بوده اند تشکرنمایم .همچنین از اساتید بزرگوار ،اقای دکتر شریف واقای دکتر عزیزی ونماینده محترم تحصیلات تکمیلی اقای دکتر دوست فاطمه کمال تشکر را دارم .

چکیده

ایده الها و زیرمدولهای, مدولهای ضربی

به وسیله ی:

محمد رویین تن

در این پایان نامه با در نظرگرفتن مفهوم مدولهای ضربی روی یک حلقه جابجائی یکدار, ابتدا ثابت می کنیم که همانسانی دو سوئی حافظ ترتیب $N(M) \bigcap V(ann(M)) \rightarrow Spec(M)$ وجود دارد.
سپس ایده ال $\theta(M) = \sum_{m \in M} (Rm : M)$ را به ایده ال $\theta_M(IM) = \sum_{x \in IM} (Rx : M)$ تعمیم می‌دهیم ,جائی که I ایده ال دلخواه حلقه R است .همچنین ثابت می کنیم که مدول ضربی M با تولید متناهی است اگر وتنها اگر برای هر ایده ال I از حلقه R , $\theta_M(IM) = (IM : M) = I + ann(M)$.
برا ی مدول ضربی M روی حلقه موضعی و نویتری (R,P) ثابت می کنیم که اگر PM مدولی ضربی باشد و $P^nM \neq P^{n+1}M$, آنگاه $\frac{R}{ann(M)}$ یک دامنه ارزیابی گسسته است .

در ادامه زیر مدولها ی اول وابسته ی مدولهای با تولید متناهی را در حالت خاصی بررسی کرده و ثا بت می کنیم که اگر M یک R–مدول شبه ضربی و با تولید متناهی باشد , آنگاه هر زیر مدول اول مینیمال M به صورت PM ا ست , جائی که P یک عضو مینیمال $Supp(M)$ است . بعلاوه اگر هر زیر مدول اول مینیمال M نیز با تولید متناهی باشد ,آنگاه M تنها تعداد متناهی زیر مدول اول مینیمال دارد . در ادامه مفاهیم مدول صحیح و مدول یکتائی تجزیه را تعریف کرده و ثابت می کنیم که هر مدول اصلی صحیح یک مدول یکتائی تجزیه است .

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل پس از مقدمه، اهداف کلی پایان نامه آورده شده است. در پایان فصل اول تعاریف، نمادها و قضایایی که در فصل های بعدی کاربرد دارند، ذکر شده اند

.

۱-۱ مقدمه

در این پایان نامه هر حلقه جابجایی ویکدار و هر مدول، یکانی می باشد. فرض کنید که M یک مدول روی حلقه R باشد. M را یک مدول ضربی گویند اگر برای هر زیر مدول N از M، ایده آل I از حلقه R موجود باشد که $N = IM$.

در [۹] و [۱۹] مفاهیم و قضایایی از مدول های ضربی آورده شده است. در [۱۷] زیر مدول $M(P)$ از م R-دول M به شکل زیر تعریف شده است:

$$M(P) = \{x \in M : sx \in PM ; s \in R \setminus P \text{ برای برخی مقادیر } \}$$

جایی که P ایده آل اولی از حلقه R است. در مقاله مذکور برای R-مدول M و ایده آل اول P از حلقه R ثابت شده است که:

۱) $M = M(P)$ یا $M(P)$ یک زیر مدول P-اول از M است.

۲) هر زیر مدول P -اول از مدول M، حاوی $M(P)$ است.

همچنین ثابت می شود که اگر مدول M، ضربی و یا با تولید متناهی باشد، آن گاه $M \neq M(P)$ اگر و فقط اگر P ایده ال اول حلقه R با ویژگی $M_P \neq 0$ باشد، جایی که M_P مدول حاصل از موضعی سازی M در P است .بنابر [۳] طبق نتیجه ای منسوب به اندرسون ثابت می شود که اگر هر ایده ال اول مینیمال از حلقه R با تولید متناهی باشد آن گاه تعداد ایده آل های اول مینیمال حلقه R متناهی است. مشابه این مطلب در [۷] ثابت شده است که اگر M مدولی ضربی و هر زیر مدول اول مینیمال آن با تولید متناهی باشد آن گاه تعداد زیر مدول های اول مینیمال M، متناهی است.

۱-۲ اهداف کلی پایان نامه

بخش اعظم این پایان نامه (فصلهای ۱ و ۲ و ۳) برگرفته از مراجع [۸] و [۱۲] می باشد. در فصل اول تعاریف و قضایایی که در فصل های بعد کاربرد دارند، بیان شده اند.

در فصل دوم به معرفی مدول های ضربی پرداخته و برخی از ویژگی های آن ها را مورد بررسی قرار می دهیم. در این فصل سعی می کنیم برخی از قضایای مربوط به مدول های ضربی را در حالت کلی تری بیان و اثبات کنیم.

ثابت می کنیم که اگر M یک مدول ضربی غیر صفر باشد، آن گاه یک همانسانی حافظ ترتیب از مجموعه $N(M) \cap Max(R)$ به روی مجموعه $Max(M)$ وجود دارد. جایی که $Max(R)$ و $Max(M)$ به ترتیب مجموعه ایده ال های ماکزیمال حلقه R و مجموعه زیر

مدول های ماکزیمال مدول M و $N(M)$ مجموعه ایده آل های اول P از حلقه R می باشد که: $PM \neq M$.

در انتها ایده آل $\theta(M)=\sum_{m\in M}(Rm:M)$ را به ایـده آل $\theta_M(IM)=\sum_{x\in IM}(Rx:M)$ کـه I ایده آل دلخواهی از حلقه R است تعمیم می دهیم. در این قسمت ثابت می کنیم که اگر M یک مدول ضربی و I ایده آلی از حلقه R باشد آن گاه $\theta(M)(IM)=\theta_M(IM)M=IM$.

همچنین ثابت می شود که اگر (R,P) حلقه ای نویتری موضعی و M مدولی ناصـفر روی حلقه R با دو ویژگی زیر باشد:

۱) M و PM مدول های ضربی باشند.

۲) برای هر عدد صحیح مثبت n، $P^nM \neq P^{n+1}M$.

آن گاه $\frac{R}{ann(M)}$ یک دامنه ارزیابی گسسته (DVR) است.

در فصل سوم ابتدا برای $R-$مدول M مجموعه های Ass_RM و $Supp_RM$ را بـه شـکل زیر معرفی می کنیم:

$$Ass_RM=\{P\in Spec(R):P=ann(x);\ x\in M \text{ برای برخی عناصر ناصفر }\}$$

$$Supp_RM=\{P\in Spec(R):M_P\neq \circ\}.$$

و متناظر با این دو تعریف مجموعه های Ass_PM و $Supp_PM$ را به شکل زیر معرفی مـی کنیم:

$$Ass_PM=\{M(P'):P'\in Ass_RM\}$$
$$Supp_PM=\{M(P'):P'\in Supp_RM\}.$$

ثابت می کنیم که اگر M یک مدول با طول متناهی روی حلقه R باشد، آن گاه:

۱) $Supp_PM=Ass_PM$ و این مجموعه متناهی است.

۲) اگر M ضربی نیز باشد، آن گاه $Max(M)=Ass_PM$.

همچنین ثابت می شود که اگر M یک $R-$مدول نویتری، ضربی باشد و $\bigcap_{i=0}^{n} Q_i = 0$ تجزیه اولیه مینیمال زیر مدول صفر باشد، آن گاه:

$$Ass_p M = \{rad(Q_i) : i = 1, \ldots, n\}.$$

همچنین در این بخش مدول های ضعیفاً با تولید متناهی و مدول های شبه ضربی را معرفی می کنیم و ثابت می کنیم که هر مدول هموار یک مدول شبه ضربی است.

در ادامه ثابت می کنیم که اگر M یک مدول شبه ضربی با تولید متناهی باشد و هر زیر مدول اول مینیمال آن نیز با تولید متناهی باشد آن گاه M تنها تعداد متناهی زیر مدول اول مینیمال دارد.

در بخش پایانی فصل سوم به بررسی برخی از خواص زیر مدول $M(P)$ می پردازیم و تعریف زیر مدول $M(P)$ را برای تعداد متناهی ایده آل اول $P_1, \ldots, P_n$ تعمیم می دهیم.

در فصل چهارم به بررسی دسته خاصی از مدول ها (مدول های صحیح) می پردازیم که تعمیمی از دامنه های صحیح هستند. برای $R-$مدول M، پوچساز هر زیر مدول ناصفر M با $ann(M)$ برابر است اگر و فقط اگر $M = 0$ یا زیر مدول صفر در M اول باشد، در این حالت M را یک $R-$مدول صحیح گوییم. اگر M یک مدول ضربی و N و K زیر مدول های M باشند، حاصل ضرب Nو K در M را به شکل $NK = IJM$ معرفی می کنیم جایی که $N = IM$، $K = JM$ و I و J ایده آل های حلقه R هستند. همچنین برای عناصر $m, m' \in M$ ضرب mm' به شکل $mm' = (Rm)(Rm')$ معرفی می شود.

ثابت می کنیم که اگر M یک مدول ضربی ناصفر باشد، آن گاه شرایط زیر معادلند:

۱) M یک مدول صحیح است.

۲) اگر $mm' = 0$ آن گاه $m = 0$ یا $m' = 0$.

۳) اگر $IJM=0$ آن گاه $IM=0$ یا $JM=0$ جایی که J,Iایده آل هایی از R هستند.

همچنین اگر M یک مدول صحیح ناصفر روی دامنه صحیح R باشد، آن گاه شرایط زیر معادلند:

۱) عناصر $0\neq r\in R$ و $0\neq m\in M$ وجود دارند که $rm=0$.

۲) $ann(M)\neq 0$.

۳) M یک مدول تابدار است.

۴) ایده آل اول P وجود دارد که R_P- مدول M_P ، تابدار غیر صفر است.

۵) ایده آل ماکزیمال P وجود دارد که R_P- مدول M_P، تابدار غیر صفر است.

در بخش دوم از فصل چهارم ابتدا مفهوم عاد کردن را برای زیر مدول های یک مدول بیان می کنیم. فرض کنید که K وN زیر مدول های $R-$مدول M باشند، گوییم N، K را عاد می کند هر گاه ایده آل I از حلقه R موجود باشد که $K=IN$. همچنین مفهوم عنصر اول و عنصر تحویل ناپذیر را در مدول M معرفی کرده و ثابت می کنیم که در مدول صحیح ضربی M عنصر $m\in M$ تحویل ناپذیر است اگر و فقط اگر Rm یک عضو ماکزیمال در مجموعه زیر مدول های دوری محض M باشد. به علاوه در هر مدول صحیح ضربی هر عنصر اول تحویل ناپذیر است.

۱-۳ قضایا و تعاریف مقدماتی

در این بخش تعاریف و قضایایی که در فصول بعد کاربرد دارند را بیان می کنیم.

فرض کنید که R یک حلقه و M یک R−مدول باشد، مجموعه تمام ایده آل های اول (ماکزیمال) حلقه R را با $Spec\ (R)$ $(Max\ (R))$ نمایش می دهیم. همچنین مجموعه تمام زیر مدول های ماکزیمال مدول M را با $Max(M)$ نشان می دهیم

.

تعریف ۱−۱.۳: فرض کنید که M یک R−مدول و Nو K زیر مدول های M باشند. مجموعه $(N :_R K)$ را به شکل $(N :_R K)=\{r \in R : rK \subseteq N\}$ معرفی می کنیم.

به روشنی دیده می‌شود که این مجموعه یک ایده ال است.

به ویژه اگر $N = \circ$ و $K = M$، آن گاه $(\circ :_R M)$ را پوچساز مدول M گویند و با نماد $ann_R(M)$ نمایش می دهند. همچنین برای هر $m \in M$، $(\circ :_R m)$ را با $ann(m)$ نشان می دهند. در مواقعی که ابهامی وجود ندارد نمادهای مذکور را بدون حرف R می نویسیم.

به طور مشابه می توان زیر مجموعه $(\circ :_M I)$ را به شکل $(\circ :_M I)=\{m \in M \ : \ Im = \circ\}$ معرفی کرد جایی که I ایده ال دلخواه حلقه R است ونشان داد که این مجموعه زیر مدول M است.

لم ۱−۲.۳: فرض کنید که M یک R − مدول ضربی و با تولید متناهی و Iو J ایده آل هایی از حلقه R حاوی $ann(M)$ باشند. اگر $IM = JM$ ، آن گاه $I = J$.

اثبات: [۱۹، نتیجه ی قضیه ۹]. ■

قضیه ۱−۳.۳: اگر M یک R−مدول آرتینی باشد، آن گاه برای هر ایده آل ماکزیمال P از حلقه R، زیر مجموعه $\Gamma_P(M)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\circ :_M P^n)$ از M یک زیر مدول M است. به علاوه

تنها تعداد متناهی ایده آل ماکزیمال مثل $P_1,\dots,P_n$ وجـود دارنـد کـه $\Gamma_{P_i}(M)\neq 0$ و در ایـن حالت $M=\oplus_{i=1}^{n}\Gamma_{P_i}(M)$.

اثبات: [۱۸، تمرین ۸-۴۹]. ■

قضیه ۱-۳-۴: فرض کنید M یک R-مدول نویتری (آرتینی و با تولید متناهی) باشـد، در این صورت حلقه $\frac{R}{ann(M)}$ ، نویتری (آرتینی) است.

اثبات: بنابر [۱۱، لم ۸-۴-۲] نتیجه می شود . ■

نتیجه ۱-۳-۵: اگر M یک R-مدول آرتینی و با تولید متناهی باشد، آن گاه M یـک مدول نویتری است.

اثبات: قرار دهید $I=ann(M)$ و $\overline{R}=\frac{R}{I}$. بنابر قضیه قبل حلقه $\overline{R}$ آرتینی و لذا نـویتری است. چون مدول M روی حلقه $\overline{R}$ با تولیـد متنـاهی اسـت، بنـابراین M یـک $\overline{R}$- مـدول نویتری است و در نتیجه روی حلقه R نیز نویتری خواهد بود. ■

قضیه ۱-۳-۶: فرض کنید که M یک مدول با تولید متناهی و P ایده آل اولی از حلقـه R شامل $ann(M)$ باشد. در این صورت اگر $aM\subseteq PM$ ، آن گاه $a\in P$.

اثبات: از این که $aM\subseteq PM$ نتیجه مـی شـود $a\in(PM:M)$. فـرض کنیـد کـه مـدول M توسط عناصر $x_1,\dots,x_n$ تولید شود. لذا برای هر $i=1,\dots,n$ ، داریم $ax_i=\sum_{j=1}^{n}r_{ij}x_j$ ، جایی که به ازاء هر $i,j=1,\dots,n$ ، $r_{ij}\in P$. اگر ماتریس A را به شکل $A=(r_{ij})_{n\times n}$ در نظر بگیریـد،

آن گاه با توجه به تساوی بالا می توان نوشت $\left(aI_{n\times n}-A\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=0$. با ضرب دو طرف تساوی

در $adj\left(aI_{n\times n}-A\right)$ به دست می آوریم $\det\left(aI_{n\times n}-A\right)x_i=0$، به ازای هر $i=1,...,n$. لذا $\det\left(aI_{n\times n}-A\right)\in ann\left(M\right)\subseteq P$ که با بسط $\det\left(aI_{n\times n}-A\right)$ نتیجه می شود $a^n+t_1a^{n-1}+...+t_{n-1}a+t_n\in P$، جایی که به ازاء هر $t_i\in P, i=1,...,n$. بنابراین $a^n\in P$ و از اول بودن P نتیجه می شود $a\in P$. ■

نتیجه ۱-۳-۷ : اگر M یک مدول با تولید متناهی و P ایده آل اولی از حلقه R شامل $ann(M)$ باشد، آن گاه: $\left(PM:M\right)=P$.

اثبات: بنابر قضیه قبل $\left(PM:M\right)\subseteq P$. از طرفی همواره $P\subseteq\left(PM:M\right)$. بنابراین $\left(PM:M\right)=P$ نتیجه می شود. ■

تعریف ۱-۳-۸: فرض کنید که M یک $R-$مدول باشد. چهار زیر مجموعه از $Spec(R)$ که با مدول M ارتباط دارند را به شکل زیر معرفی می کنیم:

$$N\left(M\right)=\left\{P\in Spec\left(R\right):PM\neq M\right\}$$

$$Supp_R\left(M\right)=\left\{P\in Spec\left(R\right):M_P\neq 0\right\}$$

$$V\left(ann\left(M\right)\right)=\left\{P\in Spec\left(R\right):ann\left(M\right)\subseteq P\right\}$$

$Ass_RM=\{P\in Spec\left(R\right):P=ann(x):\ x\in M$ برای برخی عناصر ناصفر $\}$

در حالتی که ابهامی وجود نداشته باشد $Supp_R(M)$ را به شکل $Supp\ (M)$ می نویسیم.

لم ۱-۳.۹: اگر M یک R – مدول باشد، آن گاه:

$$Supp(M)=\{P\in Spec(R):\ ann(x)\subseteq P;\ 0\neq x\in M \text{ برای برخی مقادیر}\}$$

اثبات: فرض کنید $P\in Spec(R)$ و $M_P\neq 0$. بنابراین $0\neq x\in M$ و $s\in R\setminus P$ وجود دارند که $\frac{x}{s}\neq 0$. لذا برای هر $t\in R\setminus P$ ، داریم $tx\neq 0$ ، یعنی $t\notin ann(x)$. بنابراین $ann(x)\subseteq P$. بر عکس اگر برای $0\neq x\in M$ داشته باشیم $ann(x)\subseteq P$ ، آن گاه برای هر $t\in R\setminus P$ ، $t\notin ann(x)$ و لذا $tx\neq 0$. بنابراین $0\neq\frac{x}{1}\in M_P$ و در نتیجه $M_P\neq 0$ یعنی آن که $P\in Supp(M)$. ■

لم ۱-۳.۱۰: اگر M یک R –مدول با تولید متناهی باشد، آن گاه داریم:

$$Supp(M)=\{P\in Spec(R):ann(M)\subseteq P\}=V\left(ann(M)\right).$$

اثبات: فرض کنید، $P\in Supp(M)$ بنابر لم قبل عنصر $0\neq x\in M$ وجود دارد که $ann(x)\subseteq P$. چون $ann(M)\subseteq ann(x)$ پس $ann(M)\subseteq P$.

بر عکس فرض کنید $ann(M)\subseteq P$ و $P\notin Supp(M)$ ، پس $M_P=0$. اگر عناصر $m_1,\dots,m_n$ مولدهای مدول M باشند، آن گاه به ازاء هر $i=1,\dots,n$ عنصر $\frac{m_i}{1}$ از مدول M_P برابر صفر است و بنابراین برای هر $i=1,\dots,n$ ، عنصر $s_i\in R\setminus P$ وجود دارد که $s_im_i=0$. اگر قرار دهید $s=s_1\dots s_n\in R\setminus P$ ، آن گاه برای هر $i=1,\dots,n$، داریم $sm_i=0$ و در نتیجه برای هر $m\in M$ خواهیم داشت $sm=0$. پس $s\in ann(M)\setminus P$ که با فرض $ann(M)\subseteq P$ در تناقض است. بنابراین $P\in Supp(M)$ و اثبات تمام است. ■

تعریف ۱-۳. ۱۱: فرض کنید که M یک $R-$ مدول و N زیر مدول محض M باشد. اگر برای هر $r \in R$ و $m \in M$ ، از این که $rm \in N$ نتیجه شود $m \in N$ یا $r \in (N:M)$ ، آن گاه N را یک زیر مدول اول M گویند. در لم بعد ثابت می کنیم که اگر N زیر مدول اول M باشد آن گاه $P=(N:M)$ ایده آل اولی از حلقه R است. در این حالت N را یک زیر مدول $P-$اول گویند. مجموعه تمام زیر مدول های اول مدول M را با $Spec(M)$ نمایش می دهند.

لم ۱-۳-۱۲: اگر M یک مدول ضربی و N زیر مدول محض M باشد، آن گاه عبارت های زیر معادلند:

۱) N یک زیر مدول اول M است.

۲) $(N:M)=ann\left(\frac{M}{N}\right)$ یک ایده آل اول از حلقه R است.

۳) $N=PM$ جایی که $P \in V(ann(M))$.

اثبات: [۹، نتیجه ۱۱-۲]. ■

قضیه ۱-۳-۱۳: فرض کنید که M مدولی روی حلقه R باشد در این صورت داریم:

۱) اگر R حلقه ای نویتری باشد، آن گاه $M \neq 0$ اگر و فقط اگر $Ass_R M \neq \phi$.

۲) اگر R حلقه ای نویتری باشد، آن گاه عناصر مینیمال دو مجموعه $Ass_R M$ و $Supp(M)$ یکسان هستند.

۳) اگر M یک مدول نویتری باشد، آن گاه $Ass_R M$ مجموعه ای متناهی است.

۴) اگر R حلقه ای نویتری باشد و S یک زیر مجموعه بسته ضربی R باشد، آن گاه داریم:

$$Ass_{S^{-1}R} S^{-1}M = \{S^{-1}P : P \in Ass_R M; P \cap S = \phi\}$$

۵) اگر R حلقه ای نویتری باشد و $\bigcap_{i=1}^{n} N_i = 0$ تجزیه اولیه مینیمال زیر مدول صفر باشد، آن گاه:

$$Ass_R M = \left\{ \sqrt{(N_i : M)}; i = 1,2,\ldots,n \right\}.$$

اثبات: [۱۵، بخش ۶، ص ۳۷]. ■

قضیه ۱-۳.۱۴: فرض کنید که M یک R-مدول ضربی باشد در این صورت داریم:

۱) اگر N زیر مدول M باشد، آن گاه $N = (N : M)M$.

۲) اگر I ایده آلی از حلقه R باشد که $IM = M$ ، آن گاه برای هر $m \in M$ داریم $Rm = Im$.

۳)اگر I ایده آلی از حلقه R باشد که $IM = M$ و $I \subseteq J(R)$ ، آن گاه $M = 0$.

اثبات: (۱) فرض کنید $A = (N : M)$. چون M یک مدول ضربی است لذا ایده آل I از حلقه R وجود دارد که $N = IM$. بنابراین $I \subseteq A$ و در نتیجه $N = IM \subseteq AM$. از طرفی $AM = (N : M)M \subseteq N$ پس $AM = N$.

(۲) از این که M یک مدول ضربی است نتیجه می شود که ایده آل I' از حلقه R وجود دارد که $Rm = I'M$. بنابراین با توجه به تساوی $M = IM$ داریم، $Rm = I'M = I'IM = II'M = IRm = Im$.

(۳) فرض کنید که $m \in M$. با توجه به قسمت (۲) داریم $Rm = Im$. بنابراین $i \in I$ وجود دارد که $m = im$. چون $1-i$ یک عنصر یکه از حلقه R است لذا با توجه به تساوی اخیر نتیجه می شود $m = 0$. ■